# 12　内積

すでに平面や空間のベクトルについては内積が定義されているが，一般的な（実）ベクトル空間で内積を定義する．内積が定義できるとベクトルの「長さ」が内積を使って定義できる．

## 12.1　内積

**定義 12.1** $V$ を（実）ベクトル空間とする．$V$ の任意の 2 元 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ に対して実数 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ を対応させる対応 $(\ ,\ )$ が次の条件を満たすとき $(\ ,\ )$ は $V$ の **内積**という．内積が定義されているベクトル空間は**内積空間**と呼ばれる．

(1) $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}', \boldsymbol{v})$

(2) $(c\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, ただし $c \in \mathbb{R}$.

これから $(\mathbf{0}, \boldsymbol{u}) = 0$ が任意の $V$ のベクトル $\boldsymbol{u}$ に対して成り立つ．なぜなら，

$$(\mathbf{0}, \boldsymbol{u}) = (0\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0$$

だから．

(3) $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$.

(4) $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ のとき $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) > 0$.

**例 12.1** (教科書 p.112, 例 1, 例題 6.1.1)
$V = \mathbb{R}^n$ のベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

に対して

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

は $V=\mathbb{R}^n$ の内積になっている．これを $\mathbb{R}^n$ の**標準内積**と呼ぶ．実際，上の (1) $\sim$ (4) の性質を確かめてみよう．

$$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{pmatrix},\boldsymbol{u}'=\begin{pmatrix}u'_1\\u'_2\\\vdots\\u'_n\end{pmatrix},\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}\quad \text{と書くことにする．}$$

(1)

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}',\boldsymbol{v})&=(u_1+u'_1)v_1+\cdots(u_n+u'_n)v_n\\&=u_1v_1+\cdots+u_nv_n+u'_1v_1+\cdots+u'_nv_n\\&=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{u}',\boldsymbol{v}).\end{aligned}$$

(2)$(c\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(cu_1)v_1+\cdots+(cu_n)v_n=c(u_1v_1+\cdots+u_nv_n)=c(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$.

(3) $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})=v_1u_1+\cdots+v_nu_n=u_1v_1+\cdots+u_nv_n=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$.

(4) $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=u_1^2+\cdots+u_n^2\geq 0$ なので，$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=0$ ならば $u_1=\ldots=u_n=0$ となり，$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ でないといけない．よって $\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}$ ならば $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})>0$.

## 12.2 ベクトルのノルム

ベクトル空間 $V$ に内積 $(\cdot,\cdot)$ が定義されているとき，$\boldsymbol{u}\in V$ に対して $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})\geq 0$ だから

$$\|\,\boldsymbol{u}\,\|:=\sqrt{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})}$$

を $\boldsymbol{u}$ の **ノルム** または **長さ** と呼ぶ.

**定理 12.1** (教科書 p.114, 定理 6.1.1)
内積空間のノルム $\|\cdot\|$ について次が成立.

(1) $\|\,c\boldsymbol{u}\,\|=|c|\,\|\,\boldsymbol{u}\,\|$.

(2) $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$ のとき，シュワルツの不等式：

$$|(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})|\leq\|\,\boldsymbol{u}\,\|\|\,\boldsymbol{v}\,\|$$

が成り立つ.

(3) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ のとき，三角不等式：

$$\| \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \| \leq \| \boldsymbol{u} \| + \| \boldsymbol{v} \|$$

が成り立つ．

**証明** (1)

$$(c\boldsymbol{u}, c\boldsymbol{u}) = c(\boldsymbol{u}, c\boldsymbol{u}) = c(c\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = c^2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$$

なので，両辺の平方根をとれば $\| c\boldsymbol{u} \| = |c| \, \| \boldsymbol{u} \|$.

(2) $\boldsymbol{u}$ または $\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{0}$ に等しければ，$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0 = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ なので，シュワルツの不等式は成り立っている．したがって $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ のときに示せば良い．$c \in \mathbb{R}$ のとき

$$0 \leq (\boldsymbol{u}+c\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}+c\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) + 2c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + c^2(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$$

右辺は最高次の係数が正の $c$ の 2 次式なので，これが $c$ に関係なく成り立っていることより，判別式は

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})^2 \leq (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$$

となる．両辺の平方根をとればシュワルツの不等式が得られる．

(3)

$$\| \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \|^2 = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) + 2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})^2 = \| \boldsymbol{u} \|^2 + 2(\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}) + \| \boldsymbol{v} \|^2$$

で，シュワルツの不等式より

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \leq \| \boldsymbol{u} \| \| \boldsymbol{v} \|$$

なので，上式右辺は $(\| \boldsymbol{u} \| + \| \boldsymbol{v} \|)^2$ 以下．平方根をとって結論を得る．
□

## 12.3 ベクトルの直交

**定義 12.2** 内積空間 $V$ の二つのベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ が **直交**するとは

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$$

となることを言う．

直交を使うと新しい 1 次独立性の判定方法が得られる.

**定理 12.2** (教科書 p.114, 定理 6.1.2)
内積空間 $V$ の，零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ が互いに直交するならばこれらは 1 次独立である.

**証明**

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{u}_r = \mathbf{0}$$

とする．このとき，勝手な $1 \leq j \leq r$ をとって $\boldsymbol{u}_j$ と上の式の内積をとると直交性より

$$c_j(\boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{u}_j) = 0$$

を得る．$\boldsymbol{u}_j \neq \mathbf{0}$ なので，これは $c_j = 0$ を意味．$j$ は勝手に選んだので，これは $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ が 1 次独立であることを示している. □

**練習 12.1** $\mathbb{R}^3$ のベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ a \end{pmatrix}$$

が（ $\mathbb{R}^3$ の標準内積で）直交するように $a$ を求めよ.