# 5　連立 1 次方程式を解く

連立 1 次方程式には,

1. 解を持たないもの
2. 解が唯 1 組あるもの
3. 解が無限にたくさんあるもの

の 3 種類に分かれる.

**例 5.1**

$$\begin{cases} x_1 - x_2 &= 0 \\ -x_1 + x_2 &= 1 \end{cases}$$

は解を持たない.

## 5.1　解法

$n$ 個の未知数 $x_1, \ldots, x_n$ に関する $m$ 個の方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= c_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= c_m \end{cases} \tag{2}$$

の解を求めてみよう．係数行列 $A = (a_{ij})$ と拡大係数行列 $(A \mid \boldsymbol{c})$ の違いは $\boldsymbol{c}$ の分だけ拡大係数行列が列が多いので, $\mathrm{rank}(A \mid \boldsymbol{c}) = \mathrm{rank}(A)$ または $\mathrm{rank}(A)+1$ である.

最初に $\mathrm{rank}(A \mid \boldsymbol{c}) = \mathrm{rank}(A) + 1 = r + 1$ の場合を考える．基本変形の結果

$$\left( \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & c_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & c_m \end{array} \right) \to \left( \begin{array}{c|c} S & D \\ O & F \end{array} \right)$$

と簡約形にかけたとすると, $S$ は $r$ 個の零ベクトルでない行からなっている．$D$ は $r \times 1$ 行列（$r$ 次元縦ベクトル）であり, $F$ は $(m-r) \times 1$ 行列（$m-r$ 次元縦ベクトル）で

$$F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

の形をしている．この拡大係数行列の $r+1$ 行目に対応する方程式は

$$0 \cdot x_1 + \ldots + 0 \cdot x_n = 1$$

の形になり，この方程式は解を持たない事が分かる．したがって，考えている方程式 (2) は

$$\boxed{\text{拡大係数行列と係数行列のランクが等しいときだけ解がある}}$$

という事が分かる．以下，$\mathrm{rank}(A \mid \boldsymbol{c}) = \mathrm{rank}(A)$ を仮定する．

1）$\mathrm{rank}(A) \leq n$ であるが，最初に $\mathrm{rank}(A) = n$ のときを考える．このとき，$m \geq n$ となるが，$A$ は基本変形により，簡約形

$$\begin{pmatrix} E_n \\ O_{m-n,n} \end{pmatrix}$$

となり，$\mathrm{rank}(A \mid \boldsymbol{c})$ は同じ変形で

$$\left(\begin{array}{c|c} E_n & \boldsymbol{c}' \\ O_{m-n,n} & \boldsymbol{0} \end{array}\right)$$

となる．ここで，$\boldsymbol{c}'$ は $n$ 次元縦ベクトルで，$\boldsymbol{0}$ は $m-n$ 次元の零ベクトル（縦ベクトル）である．( $\mathrm{rank}(A \mid \boldsymbol{c}) = \mathrm{rank}(A)$ だから.）したがって

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}'$$

が成り立っており，このときは解が唯一組決まる．

2）$n > \mathrm{rank}(A)$ のとき．このときは，簡約形にしたときの主成分に対応する以外の $x_i$ 達に，任意に値を与える毎に解が一組づつ決まる．このように，拡大係数行列を簡約形にする事で，方程式を解く事ができる．

**例 5.2**

$$\begin{cases} x - 2y + z &= 1 \\ x + y + 2z &= 0 \\ 3x - 3y + 4z &= 2 \end{cases}$$

を解く事を考える．

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

となり，拡大係数行列のランクと係数行列のランクが等しく 2 である．また，主成分に対応する変数は $x, y$ なので， $z = t$ とおくと，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

が解になる．

## 5.2 同次方程式

連立一次方程式 (2) で，すべての $i$ について $c_i = 0$ となるものを同次方程式と呼ぶ．この方程式は $x_i = 0,\ 1 \leq i \leq n$ を自明に解として持つが，それ以外に解があるかどうかを調べよう．先程調べたように， $\mathrm{rank}(A) = n$ のとき基本変形により $x_i = 0$ がすべての $i$ についてでてくるので，( $\boldsymbol{c}' = \mathbf{0}$ である ) このときは自明な解しかない．

$\mathrm{rank}(A) < n$ ならば，基本変形で簡約形にしたとき，主成分が 1 となる行ベクトルが $\mathrm{rank}(A)$ 個現れ，これ以外に対応する変数は自由に取って解が作れる．

**定理 5.1** (教科書 p.32, 定理 2.3.3)
$A$ は $m \times n$ 行列とする．

(1) 同次形の連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解が自明なもの（i.e., $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ ）に限る必要十分条件は

$$\mathrm{rank}(A) = n$$

(2) $m < n$ ならば， 同次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ は自明でない解を持つ．

**例 5.3**

$$\begin{cases} x + ay &= 0 \\ x + y &= 0 \end{cases} \qquad (a \text{ は実数})$$

を解こう.

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

なので, $a \neq 1$ のときは係数行列の簡約形は $E_2$ になる. このときは $x = y = 0$ の自明な解しかない.

$a = 1$ のときは係数行列のランクが 1 になり, $x = -y$ ならば何でも解になる.

**練習 5.1** (教科書 p.33 問題 2.3 (1), (4), (5)) 次の連立 1 次方程式を解け.

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 9 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$$