6　正則行列

方程式 $ax = b$ は $a \neq 0$ のとき解けて，解は $x = a^{-1}b = b/a$ と書ける．a^{-1} は a の逆数であるから， $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ である．同じように，連立方程式

$$Ax = c$$

において，A が $n \times n$ 行列のとき， $AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$ となる行列 A^{-1} があれば,

$$\boldsymbol{x} = E_n\boldsymbol{x} = A^{-1}A\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{c}$$

と計算する事ができ，連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ が唯一つの解 $A^{-1}\boldsymbol{c}$ をもつ事が分かる．(したがって $\mathrm{rank}(A) = n$ であることも分かる.) A^{-1} があるとき，A は**正則**であるといい，A^{-1} を A の**逆行列**と呼ぶ.

6.1　逆行列

$$\boldsymbol{x}_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq j \leq n$$

と書いて，n 個の独立な連立方程式

$$A\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{第 } j \text{ 成分のみが } 1, \text{ 他は } 0)$$

を並べると，$A[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n] = AX = E_n$ となるので，これを解くことになる．したがって，逆行列を求めるには， A と E_n を横に並べた行列を基本変形して

$$(A \mid E_n) \longrightarrow (E_n \mid A^{-1})$$

と簡約形にする事で求められる．つまり A が正則なとき A の簡約形は E_n となる．

例 6.1 次の行列の逆行列を求める．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

したがって，A は正則で逆行列

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を持つ．

検算：確かめ

行列の計算は計算間違いしやすいので，連立方程式を解く場合は解を方程式に代入して検算すると間違いを逃れることができる．

同じように上で求めた行列が元の行列の逆行列であることを確かめておこう．

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

として,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -4+6-1 & 2-2+0 & 1-2+1 \\ -8+9-1 & 4-3+0 & 2-3+1 \\ -4+6-2 & 2-2+0 & 1-2+2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$$

となり，確かに B は A の逆行列になっている．

例 6.2 (1) A が正則ならば A^{-1} に対して $AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$ だから A が A^{-1} の逆行列になっている．よって A^{-1} も正則で，$(A^{-1})^{-1} = A$ となる．

(2) A が正則ならば，${}^t(A^{-1}){}^tA = {}^t(AA^{-1}) = {}^tE_n = E_n$, また，${}^tA{}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = E_n$ だから，${}^tA$ も正則で逆行列 ${}^t(A^{-1})$ を持つ．

(3) A, B が正則ならば積の結合律より $AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = E_n$ かつ $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = E_n$ となり，$B^{-1}A^{-1}$ が AB の逆行列となり，AB は正則.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

練習 6.1 (教科書 p.37, 問題 2.4 の 1)

次の行列の逆行列を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$