14　極値（極大値，極小値）問題

定義 14.1 領域 D で定義された関数 f が $(a,b)\in D$ で **極大値**をとるとは，ある $\varepsilon>0$ があって，$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\varepsilon$ となる $(x,y)\in D$ に対して $f(a,b)\geq f(x,y)$ となるときに言う．上の不等式を $f(x,y)\geq f(a,b)$ とすると，(a,b) で f は **極小値**を取ると言う．極大値，極小値をまとめて **極値** と言う．

14.1　極値をとる点の候補

関数 $f(x,y)$ が領域 D 内の点 (a,b) において極大値または極小値をとっているとする．このとき，$f(x,b)$ も $x=a$ において極値をとるので，$f_x(a,b)=0$ である．同じように $f_y(a,b)=0$ も成り立つ．したがって

(a,b) で $f(x,y)$ が極値を取る $\Longrightarrow f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$

となるが，次の例が示すようにこれだけでは不十分である．

例 14.1 $f(x,y)=x^2-y^2$ では $(0,0)$ で $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ だが，$x\neq 0$ のとき，$f(x,0)=x^2>f(0,0)=0$ であり，また $y\neq 0$ のとき，$f(0,y)=-y^2<f(0,0)=0$ だから，$(0,0)$ では f は極大でも極小でもない．*((0,0) は鞍点)*

14.2　極値の判定法

テイラーの定理を使うと，f が C^2 級なら

$$\begin{aligned}
&f(a+h,b+k)\\
&=f(a,b)+hf_x(a,b)+kf_y(a,b)\\
&+\frac{1}{2}\bigl(h^2f_{xx}(a+\theta h,b+\theta k)+2hkf_{xy}(a+\theta h,b+\theta k)+k^2f_{yy}(a+\theta h,b+\theta)\bigr)
\end{aligned}$$

で，f が (a,b) で極大値を取るとすると $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ で，k,h が小さければ $f(a+h,b+k)\leq f(a,b)$ となるので，

$$h^2f_{xx}(a+\theta h,b+\theta k)+2hkf_{xy}(a+\theta h,b+\theta k)+k^2f_{yy}(a+\theta h,b+\theta k)\leq 0$$

$h^2 f_{xx}(a,b)+2hk f_{x,y}(a,b)+k^2 f_{y,y}(a,b) < 0$ が任意の h,k に対して成り立っていれば，判別式により $f_{xx}(a,b) < 0, f_{x,y}(a,b)^2 - f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) < 0$ で，このとき，f が C^2 級だから f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} は連続なので，(h,k) が十分小さければ

$$f_{xx}(a+\theta h, b+\theta k) < 0,\ f_{x,y}(a\theta h, b\theta k)^2 - f_{xx}(a\theta h, b\theta k)f_{yy}(a,b) < 0$$

が成り立ち，

$$h^2 f_{xx}(a+\theta h, b+\theta k) + 2hk f_{xy}(a+\theta h, b+\theta k) + k^2 f_{yy}(a+\theta h, b+\theta) \leq 0$$

となる．極小値の時も同じように議論できる．したがって，

定理 14.1 $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ とする．このとき，

(1) $f_{xx}(a,b) < 0, \quad D(a,b) = f_{xy}(a,b)^2 - f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) < 0$ ならば $f(a,b)$ は極大値

(2) $f_{xx}(a,b) > 0, \quad D(a,b) = f_{xy}(a,b)^2 - f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) < 0$ ならば $f(a,b)$ は極小値

判別式

$$D(a,b) = f_{xy}(a,b)^2 - f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)$$

が正の時は h/k の値によって $h^2 f_{xx}(a,b) + 2hk f_{xy}(a,b) + k^2 f_{yy}(a,b)$ の符号は正にも負にもなるので，(a,b) の近くでこの符号が定まらず，$f(a,b)$ は極大でも極小でもない．

$D(a,b) = 0$ のときは もう少し先まで展開しないと極値かどうかを判定できない．

注意 14.1 f を閉集合 F 上で 考えた時は境界上の点で極値をとることがあるが，このときは上の条件は成り立っていない．上の条件はあくまでも 領域 D 内の点で極値を取るための条件である．

例 14.2 $f(x,y) = 3x^3 + y^2 - 9x + 4y$ の極大点，極小点とそこでの f の極値を求めよ．

解

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 9x^2 - 9, \quad f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + 4$$

だから， $f_x = 0, f_y = 0$ を解いて $x = \pm 1,\ y = -2$ を得る．よって極値をとる点の候補は $(1, -2)$ と $(-1, -2)$.

$(1, -2)$ について：

$$
\begin{aligned}
f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}(9x^2 - 9) = 18x \\
f_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}(2y + 4) = 2 \\
f_{xy} &= f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}(9x^2 - 9) = 0
\end{aligned}
$$

より，$f_{xx}(1, -2) = 18 > 0$, $D(1, -2) = -36 < 0$ となるので，$f(1, -2)$ は極小値.

$(-1, -2)$ について：

$f_{xx}(-1, -2) = -18 < 0,\ D(-1, -2) = 36 > 0$ となるので，$f(-1, -2)$ は極値ではない. □

練習 14.1 (1) $f(x, y) = x^2 - 6x + y^2 - 8y + 7$ の極値とそれを取る点を求めよ.

(2) $f(x, y) = x^2 - 6x + xy + y^2 - 3y + 7$ の極値とそれを取る点を求めよ.

ヒント： まず，$f_x = f_y = 0$ を満たす点を探し，その点での f_{xx} と判別式 を計算する.