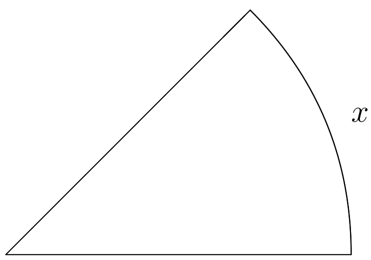
2　初等関数

2.1　三角関数

2.1.1　弧度法

角度の計り方を今後の理論に便利なように変える．この計り方は**弧度法**と呼ばれる．

半径 1 の円周の上の弧 $\overset{\frown}{AB}$ の長さを x とするとき，この弧に対応する中心角の大きさを x **ラジアン**と定義する．



円周の長さが 2π で，これが 360° に対応するので，次のような対応表ができる．

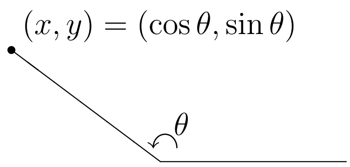
ラジアン	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$7\pi/4$	2π
度（°）	30	45	60	90	315	360

2.1.2　三角関数の定義

単位円周上の点 $P:(x,y)$ に対して，OP と x 軸がなす角度を θ（ラジアン）として，

$$x=\cos\theta,\quad y=\sin\theta$$

と定義することにする．



$\cos\theta, \sin\theta$ は周期 2π $(360°)$ の周期関数であることを思い出そう．さらに，

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

も定義できる.（正確にはこの値は $\theta = \pi/2 + n\pi$ ただし $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ のときには決まらない）

2.1.3　加法定理からの公式

定理 2.1 α, β を実数として，

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\
\tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}
\end{aligned}$$

最初の式さえ覚えておけば，他のはこの式からでる．まず，最初の式から

$$\sin(\theta + \pi/2) = \sin\theta\cos\pi/2 + \cos\theta\sin\pi/2 = \cos\theta$$

なので，

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha + \beta + \pi/2) = \sin(\alpha + \pi/2)\cos\beta + \cos(\alpha + \pi/2)\sin\beta \\
&= \cos\alpha\cos\beta + \sin(\alpha + \pi)\sin\beta = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

$\tan\theta$ の加法公式は上の二つからでる．

定理 2.2

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\}$$

$\sin\alpha\sin\beta, \cos\alpha\cos\beta$ は $\cos(\alpha + \beta)$ と $\cos(\alpha - \beta)$ を使って書ける．

証明

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

なので，両辺を加えて 2 で割ると，求める式を得る． □

2.2 指数関数と対数関数

$a > 1$ のとき $y = a^x$ のグラフを書いてみると右肩上がりの曲線になる．($a^{-x} = 1/a^x$: 指数法則から $a^x a^{-x} = a^0 = 1$)

$0 < a < 1$ のときは $y = a^x$ のグラフは左肩上がり (単調減少）となる．$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ であることは指数法則:

$$a^{x+y} = a^x a^y$$

から出てくる．($a^{1/n}a^{1/n}\cdots a^{1/n} = a^{1/n+1/n+\cdots+1/n} = a$) この関数を **指数関数**という．

指数関数は単調なので，逆関数がとれて $y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$ と書かれる．この指数関数の逆関数を**対数関数**という．$a > 0$ はこの対数の**底**, $y > 0$ は**真数**という．$A, B > 0$ のとき,

$$\log_a A + \log_a B$$

を a の肩に乗せると

$$a^{\log_a A + \log_a B} = a^{\log_a A}a^{\log_a B} = AB = a^{\log_a (AB)}$$

なので，$\log_a(AB) = \log_a A + \log_a B$ がわかる．

例 2.1 $\log_4 2$ を求めてみる．これは $4^{\log_4 2} = 2$ を言っているので，$\log_4^2 = 1/2$.

練習 2.1 次の値を求めよ．
(1) $\sin\pi/8$ (2) $4^{1/2}$ (3) $125^{2/3}$ (4) $\log_3 27$