4　導関数の計算

4.1　微分係数と導関数

定義 4.1 $x \to a$ のとき，極限

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

があれば，関数 $f(x)$ は $x=a$ で **微分可能** であるといい，この極限の値を $f'(a)$ または $\frac{df}{dx}(a)$ とかき，$f(x)$ の $x=a$ における **微分係数** という.

定義 4.2 $f(x)$ が，区間 $[a,b]$ 内のどの点においても微分可能なとき，$f(x)$ は区間 $[a,b]$ で微分可能であるといい，任意の $[a,b]$ 内の点 x に対して，x での微分係数 $f'(x)$ を対応させる関数を $f(x)$ の **導関数** といい，$f'(x)$ または $\frac{df}{dx}(x)$ で表す.

まず，計算の前に基本的な事実を示しておく.

定理 4.1 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば，$x=a$ で連続である.

証明

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=0$$

を示せば良い．$f(x)$ が $x=a$ で微分可能なので，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) &= \lim_{x\to a}\frac{(f(x)-f(a))}{x-a}\cdot(x-a)\\ &= f'(a)\cdot 0 = 0\end{aligned}$$

□

4.2　微分法の公式

次の定理は，導関数を求めるのに便利である.

定理 4.2 (教科書 定理 3.6 ∼ 3.8) $f(x), g(x)$ が区間 $[a,b]$ で微分可能な関数とするとき，導関数について以下のことが成り立つ.

(1) c を定数とするとき，$(cf(x))' = cf'(x)$,

(2) $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x), \quad (f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x),$

(3) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ (**積の微分公式**)

(4) $g(x) \neq 0$ となるところで

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2} \quad (\textbf{商の微分公式})$$

証明 定義にしたがって計算すればいい．点 x での微分を考えるので，ちょっとずらした $x+h$ と x の間の平均変化率を考え，$h \to 0$ のときの極限を考える．

(1)

$$\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} = c\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \to cf'(x)$$

(2)

$$\begin{aligned}
&\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h} \\
&= \frac{[f(x+h)-f(x)]+[g(x+h)-g(x)]}{h} \\
&= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&\to f'(x)+g'(x)
\end{aligned}$$

(3) 最初に，

$$\begin{aligned}
f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x) =& f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h) \\
&+ f(x)g(x+h)-f(x)g(x)
\end{aligned}$$

と変形しておく．（間に $f(x)g(x+h)$ を足して引いただけ．）右辺は前二つ，後ろ二つをまとめると

$$[f(x+h)-f(x)]g(x+h)+f(x)[g(x+h)-g(x)]$$

とできる．こうしておいて， $f(x)g(x)$ の微分を計算しよう．

$$
\begin{aligned}
&\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \frac{[f(x+h)-f(x)]g(x+h)+f(x)[g(x+h)-g(x)]}{h} \\
&= \frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&\to f'(x)g(x)+f(x)g'(x)
\end{aligned}
$$

(4) ここでは積の微分の公式を使って証明しよう．
$h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ とかくと，

$$h(x)g(x)=f(x)$$

だから，これを微分すると，積の微分の公式から

$$h'(x)g(x)+h(x)g'(x)=f'(x)$$

移項して

$$h'(x)g(x)=f'(x)-h(x)g'(x)=f'(x)-\frac{f(x)g'(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)}$$

したがって $g(x)$ で両辺をわると

$$h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

を得る． $\square$

4.3 合成関数・逆関数の微分

関数 $f(x)$ と $g(x)$ が微分可能で，その合成関数 $f\circ g(x)$ または $g\circ f(x)$ が考えられるとき，これらの合成関数の微分を考えることができる．

定理 4.3 f および g が微分可能で，合成 $f \circ g$ が定義されているとき，

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = (f' \circ g)(x) \cdot g'(x)$$

が成り立つ．

証明

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \times \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

なので，まず，$h \to 0$ のとき，

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \to g'(x)$$

がわかる．一方， g は微分可能なので連続で，$h \to 0$ のとき，$g(x+h) \to g(x)$, つまり，$\varepsilon = g(x+h) - g(x)$ とおくと， $g(x+h) = g(x) + \varepsilon$ とかけ，$h \to 0$ のとき $\varepsilon \to 0$ なので，

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(g(x) + \varepsilon) - f(g(x))}{\varepsilon} \\ &= f'(g(x)) = (f' \circ g)(x)\end{aligned}$$

□

定理 4.4 $f(x)$ が微分可能で，逆関数 $f^{-1}(x)$ を持てば，$f^{-1}(x)$ も微分可能で

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

証明

微分可能性は仮定して、合成関数の微分をつかう。$f(f^{-1}(x)) = x$ だからこれを微分して

$$f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1$$

ゆえに

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

□

練習 4.1 (教科書 p.65 問 3.18 (3), (5))

次の関数の導関数を求めよ．

(1) $f(x) = (x^3 - 4)(x^2 + 2)$ (2) $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-3}$, $(x \neq \dfrac{3}{2})$

(3) $f(x) = (6x^2 + 3x - 4)^3$ (合成関数の微分法を使う)