5　初等関数の微分

5.1　三角関数の微分

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ という式から三角関数の微分が得られる．差積公式から

$$
\begin{aligned}
(\sin x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h} \\
&\to \cos x
\end{aligned}
$$

となり，$(\sin x)'=\cos x$ がわかる．同様に

$$
\begin{aligned}
(\cos x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim_{x\to 0}-\frac{2\sin(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h} \\
&\to -\sin x
\end{aligned}
$$

となり，$(\cos x)'=-\sin x$ がわかる．この二つの公式と商の微分公式により，

$$
\begin{aligned}
(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \\
&= \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}
\end{aligned}
$$

もわかる．

例 5.1 $\sin(2x+1)$ の微分を考える．これは $f(x)=\sin x$ と $g(x)=2x+1$ の合成関数 $f\circ g(x)$ と思えるので，

$$
f'(x)=\cos x \quad \text{だから} \quad f'(g(x))=\cos(2x+1)
$$

で，これに $g'(x)=(2x+1)'=2$ をかけて，

$$
\frac{d}{dx}\sin(2x+1)=\cos(2x+1)\cdot 2=2\cos(2x+1)
$$

と計算すると良い．

5.2 指数関数 e^x の微分

$f(x)=a^x$ のグラフは $a>1$ のときは右上がり，$0<a<1$ のときは左上がりのグラフになっている．$x=0$ での接線の傾きは a が連続に増加すると連続に増加している．$a\to\infty$ のとき，この傾きも ∞ に発散している．($a=1$ のとき，グラフは $y=1$ で水平だから $x=0$ での接線の傾きは 0) したがって，どこかの $a>1$ で，$y=a^x$ のグラフの $x=0$ での接線の傾きが 1 になっている．

この様な a の値を e とかく．定義から

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1 \tag{1}$$

である．e は

$$e=2.71828\ldots$$

となる無理数であることが知られている．さて，$f(x)=e^x$ の微分を考えてみる．(1) から，

$$\frac{d}{dx}e^x=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^xe^h-e^x}{h}=e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^x$$

つまり e^x を微分するとまた e^x がでてくる．

$$(e^x)'=e^x$$

5.3 対数関数 $\log x=\log_e x$ の微分

次に e^x の逆関数を $\log x$ と書く．底は e であって 10 ではない．これを**自然対数**とよぶので，$\ln x$ と書く流儀もある．いずれにしろ，大学の数学では自然対数を $\log x$ と書き，常用対数は $\log_{10} x$ と底を明示する．(常用対数よさようなら！)

逆関数の微分公式から

$$(\log x)'=\frac{1}{e^{\log x}}=\frac{1}{x}$$

がでてくる．

5.4 一般の指数関数の微分

一般の指数関数 $a^x \quad (a \neq 1, a > 0)$ を考えよう．
自然対数をとると

$$\log a^x = x \log a$$

なので，$f(x) = \log x, g(x) = a^x$ として，$\log a^x = (f \circ g)(x)$ と表せるので，その微分は合成関数の微分公式から

$$\frac{1}{g(x)} \cdot (a^x)' = \log a$$

が分かる．

$$\text{左辺} \ = \frac{1}{a^x}(a^x)'$$

なので，これより $(a^x)' = a^x \log a$ が分かる．
対数をとってから微分する方法を**対数微分法**という．

例 5.2 (教科書 p.78 例題 3.25)
対数微分法を使うと次のような関数も微分できる．

$$f(x) = x^x \quad (x > 0)$$

実際，両辺の対数をとると $\log f(x) = x \log x$ で，左辺は $g(x) = \log x$ と $f(x)$ の合成関数 $g \circ f(x)$ とかけるので，微分すると

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = x^{-x} f'(x)$$

となり，右辺を微分すると

$$\log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1$$

なので，

$$x^{-x} f'(x) = \log x + 1$$

したがって，

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^x) = x^x(\log x + 1)$$

となる．

練習 5.1 (教科書 p.73 問 3.25)

次の関数を微分せよ.

(1) $y = \sin(3x-2)$ (2)$y = \cos(x^3)$ (3) $y = \sin^3 x$ (4) $y = \dfrac{1}{1+\sin x}$

練習 5.2 (教科書 p.77 問 3.28)

次の関数を微分せよ.

(1) $y = e^{-x}$ (2)$y = (\log x)^2$ (3)$y = \dfrac{\log x}{x}$

練習 5.3 (教科書 p.78 問 3.29, 問 3.30 (1))

次の関数 $f(x)$ について対数微分法によって導関数を求めよ. $x > 0$ とする.

(1) $f(x) = x^\alpha$ (α は定数) (2) $f(x) = x^{1/x}$