7　テイラーの定理

このテーマは大学で始めて学ぶ．数 III や数 C でも習わないことなので，理解が大切．これまでに勉強したいろいろな関数の微分について表を作っておこう．

$f(x)$(もとの関数)	$f'(x)$（微分した関数）	備考
x^n	nx^{n-1}	n :自然数
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	α は実数
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	商の微分
e^x	e^x	
e^{-x}	$-e^{-x}$	
$\log x$	$\dfrac{1}{x}$	
$f(x)g(x)$	$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$	積の微分
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$	$g(x)\neq 0$: 商の微分
$f\big(g(x)\big)$	$f'\big(g(x)\big)g'(x)$	合成関数の微分

7.1　高次導関数

関数 $f(x)$ がすべての点で微分可能なら，x に $f'(x)$ を対応させる関数ができ，これが $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ である．同じことを $f'(x)$ とその微分について考えると**二次導関数** $f''(x)$ が得られる．したがって $n\geq 1$ に対して $f(x)$ が n 回微分可能な関数なら，n **次導関数** $f^{(n)}(x)$ が得られる．

7.2 テイラーの定理

定理 7.1 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ で $n-1$ 回微分可能で，$n-1$ 次導関数が連続であり，さらに開区間 (a,b) では n 回微分可能とすると，$a \leq x \leq b$ に対して $a < c < b$ となる c で

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(c) \tag{2}$$

が成り立つ．ただし，$f^{(n)}(x)$ は f の n 次導関数.

a を b に代えても良い．このとき c の値は少し変わる．ただし，$a < c < b$ の関係は変わらない.

証明 $n=2$ のときでも十分面倒臭いので，このときだけ証明しておく．一般の n についても同じ方法が使える.

$$g(x) = f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}\{f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)\}$$

とおくと，$g(a) = 0, g(b) = 0$ で，g は $[a,b]$ で連続，(a,b) で微分可能なので，Rolle の定理により，$a < c < b$ となる c で $g'(c) = 0$ となるものがある.

$$g'(x) = f'(x) - f'(x) + (b-x)f''(x) - 2\frac{(b-x)}{(b-a)^2}\{f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)\}$$

だから $g'(c) = 0$ は

$$(b-c)f''(c) = 2\frac{(b-c)}{(b-a)^2}\{f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)\}$$

両辺を $2(b-c)/(b-a)^2 \neq 0$ でわると

$$\frac{(b-a)^2}{2}f''(c) = f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)$$

移項して，

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(c)$$

b を x に置き換えて

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(c)$$

□

例 7.1 $f(x)=e^x$ は微分可能で，$f'(x)=e^x=f(x)$ なので，$f^{(n)}(x)=e^x$ が任意の $n\geq 0$ について成り立つ．したがって， Taylor の定理を $n=3$ で $a=0$ として使うと，($x=0$ で 3 次まで Taylor 展開するという)
$f'(0)=\ldots=f^{(3)}(0)=1$ だから

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}e^c \quad (0<c<x)$$

上式の最後の項は $x>0$ のとき 0 以上なので,

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

これより $x>0$ のとき

$$xe^{-x} < (1+x)e^{-x} \leq \frac{1+x}{1+x+x^2/2} \to 0 \quad (x\to\infty)$$

$n=4$ で Taylor の定理をつかうと上と同じ議論で

$$x^2e^{-x} \to 0 \quad (x\to\infty)$$

もわかる．

例 7.2 上の計算を形式的に無限に続けると

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

という式を得る．この式は正しいことが知られている．e^x の「$x=0$ での *Taylor* 展開」と呼ばれる．または *Maclaurin* 展開ともいう．($x=0$ での展開に限る)

同じように

$$f(x)=\sin x$$

とすると，$f'(x)=\cos x$ なので，$f''(x)=-\sin x=-f(x)$ これから何回も微分が出来て

$$f^{(2n)}(x)=(-1)^n\sin x, \quad f^{(2n+1)}(x)=(-1)^n\cos x$$

がわかり，*Taylor* の定理で $n\to\infty$ とすると

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

がわかる．また，これを形式的に微分して

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

も得る．これも正しいことが知られている．

実際に高次の項まで Taylor の定理を実行するのはなかなか難しい．$n = 2$ くらいで使うことが多い．

練習 7.1 (教科書 p.109, 練習問題 3.13 (1),(2))
次の関数を与えられた点のまわりで Taylor 展開せよ．

(1) $f(x) = \sqrt{x+2}$ ($x = 2$，2 次の項まで)

(2) $f(x) = x\cos\pi x$ ($x = 1$，3 次の項まで)

練習 7.2 $f(x) = \sin x$ を $x = \pi/4$ のまわりで 3 次まで Taylor 展開せよ．