8　積分法

これまでに勉強したいろいろな関数の微分について表を作っておこう.

$f(x)$(もとの関数)	$f'(x)$（微分した関数）	備考
x^n	nx^{n-1}	n :自然数
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	α は実数
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	商の微分
e^x	e^x	
e^{-x}	$-e^{-x}$	
$\log x$	$\dfrac{1}{x}$	
$f(x)g(x)$	$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$	積の微分
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$	$g(x)\neq 0$: 商の微分
$f\big(g(x)\big)$	$f'\big(g(x)\big)g'(x)$	合成関数の微分

8.0.1　原始関数

定義 8.1 関数 $f(x)$ に対して，ある関数 $F(x)$ が，その導関数 $F'(x)$ が $f(x)$ と一致する，つまり

$$F'(x) = f(x)$$

となるとき，$F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**という.

注意 8.1 原始関数は一つとは限らない．たとえば，$F_1(x)=\frac{x^2}{2}+3, F_2(x)=\frac{x^2}{2}$ はともに $f(x)=x$ の原始関数となる．

8.1　不定積分

原始関数の一般形を**不定積分** という．

定理 8.1 二つの関数 $F_1(x), F_2(x)$ がともに $f(x)$ の原始関数ならば

$$F_1(x)-F_2(x)=\text{一定}$$

となる

証明　簡単のため，$F_1(x), F_2(x)$ は実数全体で定義されており，ともに $f(x)$ の導関数とする．このとき，

$$(F_1(x)-F_2(x))'=f(x)-f(x)=0$$

なので，平均値の定理から $x\neq 0$ のとき，0 と x の間の c があって，

$$(F_1(x)-F_2(x))-(F_1(0)-F_2(0))=(F_1-F_2)'(c)(x-0)=(f(c)-f(c))\cdot x=0$$

となるので，$F_1(x)-F_2(x)$ は x によらず一定になる．　□

したがって，$F(x)$ が $f(x)$ の一つの原始関数であるとき，その不定積分は

$$F(x)+C \quad (C \text{ は（積分）定数})$$

とかけ，これを

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C \quad (C \text{ は（積分）定数})$$

と表す．微分の関係から不定積分はつぎの関係を満たす．

定理 8.2 実数 a, b に対して，

$$\int (af(x)+bg(x))\,dx=a\int f(x)\,dx+b\int g(x)\,dx$$

上の表をもとに，いろいろな関数の不定積分を求めてみよう．

補題 8.3

$$\int x^\alpha\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, & \alpha \neq -1 \text{ のとき} \\ \log|x| + C, & \alpha = -1 \text{ のとき} \end{cases}$$

証明　$\alpha \neq -1$ のとき

$$\frac{d}{dx}\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} = x^\alpha$$

だから，$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ は x^α の原始関数．これは前半の式を言っている．

$\alpha = -1$ のときは，$x > 0$ ならば

$$(\log x)' = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

だから，$\log x$ が x^{-1} の原始関数であり，探すと，$\log x$ がある．したがって，$x > 0$ のとき

$$\int x^{-1}\,dx = \log x + C$$

がわかる．$x < 0$ のとき，$\log(-x)$ を微分すると，合成関数の微分だから

$$(\log(-x))' = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

よって，$\log|x|$ は x^{-1} の原始関数．これは後半の式を示している．　□

同様に

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$
$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$
$$\int e^x\,dx = e^x + C$$
$$\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C$$

などがわかる．

8.2 定積分

区間 $[a,b]=\{x : a \leq x \leq b\}$ で $f(x)$ を考える．$f(x)$ がこの区間で正のとき，$\{x=a\},\{x=b\}$ と x 軸と $y=f(x)$ とでかこまれた図形の面積を

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

とかく．$f(x)$ が負の値もとるときは，この式は $f(x)>0$ となる部分の面積から $f(x)<0$ となる部分の面積を引いたものとして定義される．また,

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

と約束しておく．

定理 8.4 $a<b$ のとき，$f(x)$ の原始関数の一つを $F(x)$ とかくとき，$f(x)$ が連続なら

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) \qquad \text{(微分積分学の基本定理)}$$

$G(x)=\int_a^x f(t)dt$ が $f(x)$ の原始関数になることを確かめる．

$$\int_a^{b+h} f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_b^{b+h} f(x)\,dx.$$

右辺は $f(x)$ が連続ならば $h>0$ が小さいとき $f(b)h$ にほぼ等しく，したがって両辺を h でわって，$h\to 0$ とすると,

$$\frac{1}{h}\left(\int_a^{b+h} f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right) \to f(b)$$

$b>a$ は考えている区間で勝手に選べるので，$G'(x)=f(x)$ が成り立っている．$f(x)$ のひとつの原始関数を $F(x)$ とかくと,

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x)+C$$

とかける．$x=a$ のとき，左辺の面積は 0 だから，$F(a)+C=0$ つまり，$C=-F(a)$ なので,

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x)-F(a).$$

□