2.8　Girsanov の定理とドリフトつき Brown 運動

$B(t)$ を $(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動とするとき，

$$\int_0^T \theta(t)^2 dt < \infty \quad a.s.$$

となる $(\mathcal{F}_t)$-適合過程 $\theta(t)$ に対して

$$Z(t) = \exp\left\{\int_0^t \theta(s)\,dB(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta(s)^2\,ds\right\}$$

が $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールであるとする．

$$P_T(A) = E\left[Z(T)\,;\,A\right] \tag{2.16}$$

によって定義した $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ 上の確率測度 P_T について，任意の $0 \leq t \leq T$ に対して $A \in \mathcal{F}_t$ のとき

$$P_T(A) = E\left[Z(T)\,;\,A\right] = E\left[Z(t)\,;\,A\right]$$

が $Z(t)$ のマルチンゲール性から得られる．Girsanov の定理はこの性質に基づくもので次のように述べられる．

定理 2.19（Girsanov の定理）　$(\Omega, \mathcal{F}_T, P_T)$ で考えたとき $W(t) = B(t) - \int_0^t \theta(s)\,ds$ は $(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動になる．

証明　$\theta = a$ （定数）という簡単な場合にのみ証明を与えておく．完全な証明は連続マルチンゲールの表現定理に基づく．最初に $\theta = a$ の場合は $Z(t) = \exp\{aB(t) - \frac{a^2}{2}t\}$ は

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^T Z(t)^2 dt\right] &= \int_0^T E\left[\exp\bigl\{2aB(t) - a^2 t\bigr\}\right] dt \\ &= \int_0^T \exp\{a^2 t\} dt < \infty \end{aligned}$$

となり，これは $\mathcal{L}^2$ の元であることに注意する．

次に $e^{i\xi W(t) + \frac{\xi^2}{2}t}$ が確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}_T, P_T)$ で $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールになることを確かめる．

$$W(t) = aB(t) - \frac{a^2}{2}$$

$$U(t) = i\xi B(t) - ia\xi t + \frac{\xi^2}{2}$$

に対して $e^{W(t)+U(t)} = e^{i\xi W(t)+\frac{\xi^2}{2}t}Z(t)$ に 2 次元の伊藤の公式を $f(x,y) = e^{x+y}$ として使うと，$f_x = f_y = f_{xx} = f_{xy} = f_{yy} = e^{x+y}$ であるので，

$$
\begin{aligned}
e^{W(t)+U(t)} &= e^{i\xi W(t)+\frac{\xi^2}{2}t}Z(t) \\
&= 1 + \int_0^t (i\xi)e^{W(s)+U(s)}dB(s) \\
&+ a\int_0^T e^{W(s)+U(s)}dB(s) \\
&- \frac{a^2}{2}\int_0^t e^{W(s)+U(s)}ds - ia\xi\int_0^t e^{W(s)+U(s)}ds \\
&+ \frac{\xi^2}{2}\int_0^t e^{W(s)+U(s)}ds \\
&+ \frac{1}{2}\left[\int_0^t e^{W(s)+U(s)}a^2ds + 2ai\xi\int_0^t e^{W(s)+U(s)}ds + (i\xi)^2\int_0^t e^{W(s)+U(s)}ds\right] \\
&= 1 + \int_0^T (i\xi + a)e^{i\xi W(s)+\frac{\xi^2}{2}s}Z(s)\,dB(s)
\end{aligned}
$$

となり，これは P について $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲール．したがって $t > s, A \in \mathcal{F}_s$ のとき

$$
\begin{aligned}
E_T\left[e^{i\xi W(t)+\frac{\xi^2}{2}t}\,;\,A\right] &= E\left[e^{i\xi W(t)+\frac{\xi^2}{2}t}Z(t)\,;\,A\right] \\
&= E\left[e^{i\xi W(s)+\frac{\xi^2}{2}s}Z(s)\,;\,A\right] \\
&= E_T\left[e^{i\xi W(s)+\frac{\xi^2}{2}s}\,;\,A\right]
\end{aligned}
$$

となり，$e^{i\xi W(t)+\frac{\xi^2}{2}t}$ は P_T について $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲール．よって

$$E_T\left[e^{i\xi W(t)+\frac{\xi^2}{2}t}\middle|\mathcal{F}_s\right] = e^{i\xi W(s)+\frac{\xi^2}{2}s} \quad \text{a.s.},$$

すなわち

$$E_T\left[e^{i\xi(W(t)-W(s))}\middle|\mathcal{F}_s\right] = e^{\frac{\xi^2}{2}(t-s)} \quad \text{a.s.}$$

となり，P_T でみると $W(t) - W(s)$ は $\mathcal{F}_s$ と独立で平均 0 分散 $t - s$ のガウス分布に従っており $W(t)$ は $(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動である． $\square$