2.4　階段過程の確率積分

定義 2.8 $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$ に対し，$(\mathcal{F}_t)$-適合な確率過程 $\Phi(t)$ が**階段型**とは，自然数 n, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \infty$ と有界な確率変数列 $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ があって，

(i) 各 ξ_j $(1 \leq j \leq n)$ は $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$-可測，ξ_0 は $\mathcal{F}_0$-可測，

(ii) $\Phi(t) = 1_{\{0\}}(t)\xi_0 + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} 1_{(t_{j-1}, t_j]}(t)\xi_j$

の 2 条件をみたすときにいう．

階段型確率過程の全体を $\mathcal{L}_0$ で表す．

定義 2.9 $\Phi \in \mathcal{L}_0$ に対して連続な確率過程 $I(\Phi)(t)$ を

$$I(\Phi)(t) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \big(B(t \wedge t_j) - B(t \wedge t_{j-1})\big) \quad t \geq 0 \tag{2.8}$$

によって与える．ただし，$t \wedge s = \min\{s, t\}$ と約束する．$I(\Phi)(t)$ を Φ の *Brown* 運動による**確率積分**とよび，

$$\int_0^t \Phi(s) dB(s)$$

とも書く．

定理 2.13 (**確率積分の性質**)　$\Phi \in \mathcal{L}_0$ とする。このとき、以下が成り立つ。

(i) ($(\mathcal{F}_t)$-適合性) 任意の $t \in [0, \infty)$ に対して $I(\Phi)(t)$ は $\mathcal{F}_t$-可測

(ii) (連続性) $I(\Phi)(t)$ は t について連続 *a.s.*

(iii) (線形性)

$$I(\alpha\Phi + \beta\Psi)(t) = \alpha I(\Phi)(t) + \beta I(\Psi)(t) \quad a.s.$$

(iv) (マルチンゲール性)

$$E\big(I(\Phi)(t) \big| \mathcal{F}_s\big) = I(\Phi)(s) \quad a.s.$$

(v)（等長性)

$$E\big((I(\Phi)(t))^2\big) = E\int_0^t \Phi(s)^2 ds$$

さらに一般に $t > v$ のとき,

$$E\big[(I(\Phi)(t))^2 - \int_0^t \Phi(s)^2 ds \big| \mathcal{F}_v\big] = I(\Phi)(v)^2 - \int_0^v \Phi(s)^2 ds$$

証明　(i) いま，階段過程を

$$\Phi(t) = 1_{\{0\}}(t)\xi_0 + \sum_{j=1}^n 1_{(t_{j-1},t_j]}(t)\xi_j$$

と書いておく．$t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n < \infty$ である．場合分けをして示す. まず 定義から $I(\Phi)(0) = 0$ であり，これは定数なので $\mathcal{F}_0$-可測.

つぎに $t_{i-1} < t \le t_i$ となる $i \le n$ があるとき,

$$I(\Phi)(t) = \sum_{j=1}^{i-1} \xi_j(B(t_(j) - B(t_{j-1})) + \xi_i(B(t) - B(t_{i-1}))$$

となるが，右辺はどれも $\mathcal{F}_t$-可測.

最後に $t > t_n$ のとき,

$$I(\Phi)(t) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j(B(t_(j) - B(t_{j-1}))$$

となり，$t > t_n$ よりこれは $\mathcal{F}_t$-可測.

(ii) 上の計算から $t \ge t_n$ のときは $I(\Phi)(t) = I(\Phi)(t_n)$ だから同じ値をとりつづけ，連続.

$t_{i-1} < t < t_i$ のとき，$s_m \to t$ となる s_m の列も同じ区間に入るとして良い．このとき

$$I(\Phi)(t) - I(\Phi)(s_m) = \xi_i(B(t) - B(s_m))$$

となり，Brown 運動の連続性から右辺は $s_m \to t$ のとき 0 に近づく.

$t = t_i$ のとき $s_m < t_i$ ならば上と同じ議論ができる．$s_m > t_i$ で $s_m \to t$ のとき，$t_i < s_m < t_{i+1}$ として良い．このとき

$$I(\Phi)(t) - I(\Phi)(s_m) = -\xi_{i+1}(B(s_m) - B(t_i))$$

これも 0 に近づく．
(iii) 明らか
(vi) 宿題
(v) 後半を証明すれば，$v = 0$ とした式により

$$E\left[(I(\Phi)(t))^2 - \int_0^t \Phi^2(s)ds \big| \mathcal{F}_0\right] = 0$$

この式の期待値をとれば前半が示せる．
　まず $t > v > t_n$ のとき

$$I(\Phi)(t) - I(\Phi)(v) = 0, \quad \Phi(t) - \Phi(v) = 0$$

だから， この式は明らかに成立． $v \leq t_n$ として良い．今，$t_{i-1} < v \leq t_i$ とする．$t \geq t_n$ ならば，

$$I(\Phi)(t) - I(\Phi)(v) = \sum_{j=i}^{n-1} \xi_j (B(t_{j+1}) - B(t_j)) + \xi_i (B(t_i) - B(v))$$

となり，

$$E\left[(I(\Phi)(t))^2 \mid \mathcal{F}_v\right]$$
$$= E\left[(I(\phi)(t) - I(\Phi)(v))^2 + 2I(\Phi)(v)(I(\Phi)(t) - I(\Phi)(v)) \mid \mathcal{F}_v\right] + (I(\Phi)(v))^2 .$$

面倒だが，

$$\begin{aligned}(I(\Phi)(t) - I(\Phi)(v))^2 = &\sum_{j=i}^{n-1} \xi_{j+1}^2 (B(t_{j+1}) - B(t_j))^2 + \xi_i^2 (B(t_i) - B(v))^2 \\ &+ 2\xi_i (B(t_i) - B(v)) \sum_{j=i}^{n-1} \xi_{j+1} (B(t_{j+1}) - B(t_j)) \\ &+ 2 \sum_{i \leq j < k \leq n-1} \xi_j (B(t_{j+1}) - B(t_j)) \xi_k (B(t_{k+1}) - B(t_k))\end{aligned}$$

と分けておく．ここで， $t_j \geq v$ のとき x_{j+1} は $\mathcal{F}_{t_j}$-可測なので，

$$E\left(\quad \xi_{j+1}^2 (B(t_{j+1}) - B(t_j))^2 \mid \mathcal{F}_{t_j}\right) = \xi_{j+1}^2 E\left((B(t_{j+1}) - B(t_j))^2\right) = \xi_{j+1}^2 (t_{j+1} - t_j)$$
$$E\left(\xi_i^2 (B(t_i) - B(v))^2 \mid \mathcal{F}_v\right) = x_i^2 (t_i - v)$$

となり，右辺第 1 項と第 2 項の和は

$$E\left(\int_v^t \Phi^2(s)ds \mid \mathcal{F}_s\right)$$

に等しい．一方，$j > i$ のとき

$$\begin{aligned}
&E\left(\xi_i(B(t_i) - B(v))\xi_{j+1}(B(t_{j+1}) - B(t_j)) \mid \mathcal{F}_{t_j}\right) \\
&= \xi_i(B(t_i) - B(v))\xi_{j+1}E(B(t_{j+1}) - B(t_j)) = 0
\end{aligned}$$

となり，この式の $\mathcal{F}_v$ での条件付き期待値をとると 0 となる．同様に $k > j > i$ のとき

$$\begin{aligned}
&E\left(\xi_j(B(t_{j+1}) - B(t_j))\xi_k(B(t_{k+1}) - B(t_k)) \mid \mathcal{F}_{t_k}\right) \\
&= \xi_j(B(t_{j+1}) - B(t_j))\xi_k E(B(t_{k+1}) - B(t_k)) = 0
\end{aligned}$$

なので，まとめると

$$E\left((I(\Phi)(t) - I(\Phi)(v))^2 \mid \mathcal{F}_v\right) = E\left(\int_v^t \Phi(s)^2 ds \mid \mathcal{F}_v\right)$$

となる．一方，

$$E\left(I(\Phi)(v)(I(\Phi)(t) - I(\Phi)(v)) \mid \mathcal{F}_v\right) = I(\Phi)(v)E\left((I(\Phi)(t) - I(\Phi)(v)) \mid \mathcal{F}_v\right) = 0$$

が (vi) より言える．したがって

$$E\left((I(\Phi)(t))^2 \mid \mathcal{F}_v\right) = (I(\Phi)(v))^2 + E\left(\int_v^t \Phi(s)^2 ds \mid \mathcal{F}_v\right).$$

これは求める式である．$t \le t_n$ のときも同様.