

練習 9.1 教科書 p.80 問題 4.3 の 1. を (1) について解け. つまり,

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

について,

- (i) 1 次独立な最大個数 r を求めよ.
- (ii) r 個の 1 次独立なベクトルを前の方から順に求めよ.
- (iii) 他のベクトルを (ii) のベクトルの 1 次結合で表せ.

【解】 (i) $\mathbf{a}_1 \sim \mathbf{a}_5$ を横に並べた行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 10 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

について簡約形を求める.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 10 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 10 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よってこの簡約形の列ベクトルを左から $b_1 \sim b_5$ とかくと, b_1, b_2, b_4 が 1 次独立で,

$$b_3 = 3b_1 - b_2, \quad b_5 = -b_1 + 2b_2 + b_4$$

となる. 以上から このうち 4 個のベクトルは常に 1 次従属だから $r = 3$

(ii) 簡約形の計算より,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

の 3 個のベクトルが 1 次独立.

(iii) これも簡約形の計算から

$$\mathbf{a}_3 = 3\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2, \quad \mathbf{a}_5 = -\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4$$

がわかる.