積分練習問題 (自習用)

1. つぎの不定積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+2x+5}\,dx$ (2) $\displaystyle\int x\sin x\,dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{6}{x^2-9}\,dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx$ (5) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ (6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}$

(7) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1+\log x)}$ (8) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx$ (9) $\displaystyle\int \sin^3 x\cos^4 x\,dx$

(10) $\displaystyle\int \sin 2x\cos 3x\,dx$ (11) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$ (12) $\displaystyle\int x(x-4)^{1/3}\,dx$

(13) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+10}}$, (14) $\displaystyle\int \frac{7x^2+2x-3}{(2x-1)(3x+2)(x-3)}\,dx$

(15) $\displaystyle\int \frac{x-11}{x^2+3x-4}\,dx$ (16) $\displaystyle\int \frac{x^3-8x^2-1}{(x+3)(x^2-4x+5)}\,dx$

(17) $\displaystyle\int xe^x\,dx$ (18) $\displaystyle\int x\sin 2x\,dx$ (19) $\displaystyle\int x^3\log x\,dx$

(20) $\displaystyle\int x\mathrm{Arctan}x\,dx$ (21) $\displaystyle\int x\cos^2 x\sin x\,dx$ (22) $\displaystyle\int x^5\sqrt{x^3+4}\,dx$

2. 次の定積分を計算せよ

(1) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+x^4}$ (2) $\displaystyle\int_0^\pi \cos^4 x\,dx$ (3) $\displaystyle\int_1^4 x\log x dx$

(4) $\displaystyle\int_1^8 x^{1/3}\,dx$ (5) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \cos\frac{x}{2}\,dx$ (6) $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{x^2+2x-3}$

(7) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{Arctan}x\,dx$ (8) $\displaystyle\int_1^e \log x\,dx$ (9) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}}$

(10) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1-x^2)^{1/3}}\,dx$ (11) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$,

3. 次の広義積分が収束するか発散するかを判定せよ

(1) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^6+x}}$, (2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{e^{2x}}\,dx$,

(3) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{\log x}{x}\,dx$, (4) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x^3}\,dx$

4. **やや難**

(a) n を自然数として、

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}\left[\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\cos\frac{2k-1}{2^n}x\right]$$

を証明せよ。

(b) 右辺は $n\to\infty$ のときある関数の定積分に近づく。この関数はなにか。また、定積分はどこからどこまでの区間で積分するものか？

(c) この積分を計算せよ。また、これにより等式

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}$$

が成り立つ事を確かめよ。

(d) 上の事を使って

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots$$

が成り立つ事を示せ。(Viète の公式)

5. 関数 $f(x)$ の Laplace 変換 は

$$Lf(s)=\int_0^\infty f(x)e^{-sx}\,dx$$

と与えられる。 Laplace 変換は微分方程式を解く時に有効である。

(a) $\alpha>-1$ のとき x^α の Laplace 変換は $\Gamma(\alpha+1)/s^{\alpha+1}$ となり、$s>0$ で正しい。これを証明せよ。

(b) $f(x)=e^{\alpha x}$ のとき、Laplace 変換は $1/(s-\alpha)$ である。これは $s>\alpha$ で正しい。これを証明せよ。

(c) $f(x)=\sin(\alpha x)$ の Laplace 変換は $\alpha/(s^2+\alpha^2)$ である。これは $s>0$ で正しい。これを証明せよ。

(d) $f(x)=\cos(\alpha x)$ の Laplace 変換を計算せよ。また、これは s がどのような条件を満たす時に計算できるか？

重積分の問題

6. 次の積分順序を交換せよ。ただし、 $a > 0$ とする。

(a) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^x f(x,y)\,dy\right)dx$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\right)dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\frac{a}{\cos\theta}} f(r,\theta)\,dr\right)d\theta$ item $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} F(x,y)dy\right)dx$

(d) $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_{y^2}^{6-y} F(x,y)dx\right)dy$

(e) $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{3y}} F(x,y)dx\right)dy$

7. 次の重積分を計算せよ。

(a) $\displaystyle\int_{\{0\leq x+y\leq 1,\ 0\leq x-y\leq 3\}} (1-x-y)e^{x-y}\,dxdy$

(b) $\displaystyle\int_{\{x^2+y^2+z^2\leq 1,\ z\geq 0\}} 2zdxdydz$

(c) $\displaystyle\int_D (3-xy)\ dxdy \qquad D=\{0\leq x\leq 2,\ 0\leq y\leq 1\}$

(d) $\displaystyle\int_D (x+y)\ dxdy \qquad D=\{0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq x^2\}$

(e) $\displaystyle\int_D ye^{y^3}\,dxdy \qquad D=\{0\leq x\leq 1,\ x\leq y\leq 1\}$

(f) $\displaystyle\int_D y^2\,dxdy \qquad D=\{x\geq 0, y\geq 0,\ x^2+y^2\leq 4\}$

8. 次の立体の体積を求めよ．ただし，$a > 0$ とする．

(a) $V=\{(x,y,z)\,;\,0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 2x,\ 0\leq z\leq x^2+y^2\}$

(b) $V=\{(x,y,z)\,;\,x^2+y^2\leq a^2,\ 0\leq z\leq y\}$

(c) $V=\{(x,y,z)\,;\,x^2+y^2\leq ax,\ x^2+y^2+z^2\leq a^2\}$ (円柱座標 (r,θ,z) に変数変換)

(d) 曲面 $z=xy$, 平面 $x+y=1, z=0$ によって囲まれた図形の体積 V.

(e) 曲面 $z^2 = 4ax$ と円柱面 $x^2 + y^2 = ax$ で囲まれた図形の体積 V.