

練習問題 8 の解答

練習 8.1 つぎの  の中に当てはまる言葉を入れよ .

(1) 母集団が  $N(0, \sigma^2)$  の分布を持つとき , そこから得られた大きさ  $n$  の無作為標本  $(X_1, \dots, X_n)$  について

$$X = \frac{1}{\sigma^2}(X_1^2 + \dots + X_n^2) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^n X_j^2$$

は自由度  の  分布に従う . さらに

$$Y = \frac{1}{\sigma^2} ((X_1 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2$$

は自由度  の  分布に従う . ただし ,  $\bar{X}$  は標本平均

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$$

である .

(2)  $X$  が  $N(0, 1)$  に従い ,  $Y$  が  $X$  と独立で自由度  $\nu$  のカイ 2 乗分布に従うとき ,

$$\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{\nu}}}$$

は自由度  の  分布に従う .

(3) 母集団が  $N(\mu, \sigma^2)$  の分布を持つとき , そこから得られた大きさ  $n$  の無作為標本  $(X_1, \dots, X_n)$  について

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{U_n^2}{n}}}$$

は自由度  の  分布に従う . ただし ,  $U_n^2$  は不偏標本分散で

$$U_n^2 = \frac{1}{n-1} ((X_1 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2$$

である .

(4)  $X$  が自由度  $A$  のカイ 2 乗分布 ,  $Y$  は  $X$  と独立な自由度  $B$  のカイ 2 乗分布に従うとき ,

$$\frac{\frac{X}{A}}{\frac{Y}{B}}$$

は自由度 ( ,  ) の  分布に従う .

練習 8.2 推定する母数を  $\theta$  とする . 母集団の分布に従う確率変数が離散的な値をとるときは , 尤度関数  $L(\theta)$  としては無作為標本  $X_1, \dots, X_n$  に対してその実現するパラメータ  $\theta$  に対する確率となる . たとえば ,  $(0-1)$  分布の母集団から無作為標本をとった場合に母平均  $\theta$  を最尤法で推定する場合 , 標本  $X_1, \dots, X_n$  が実現する確率は

$$X_1 + \dots + X_n = \sum_{j=1}^n X_j$$

がちょうど  $X_j$  達のうち 1 となったものの個数であることに注意すると

$$L(\theta) = \theta^{\sum_{j=1}^n X_j} (1 - \theta)^{n - \sum_{j=1}^n X_j}$$

と書ける . 対数尤度関数  $l(\theta) = \log L(\theta)$  について

$$l(\theta) = \text{  }$$

だから、 $l(\theta)$  を最大にする  $\theta$  の値  $\hat{\theta}$  は

$$\hat{\theta} = \boxed{\text{(イ)}}$$

となる。 $\hat{\theta}$  が最尤推定量を与える。

$$\text{(ア) の答 } \underline{\sum_{j=1}^n X_j \log \theta + (n - \sum_{j=1}^n X_j) \log(1 - \theta)}$$

$$\text{(イ) の答 } \underline{\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j}$$