平成 17 年度博士課程前期課程入学試験問題: 数学 I

神戸大学自然科学研究科数学専攻
平成 16 年 8 月 31 日
時間: 9:30 – 12:00

以下の問題 5 問すべてについて解答せよ. 解答用紙は 1 問につき 1 枚ずつ用いよ.

1. 次の問に答えよ.

(1) $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\log\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_D x\,dx\,dy$ を計算せよ. $\left(\text{ただし}, D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\right\}\text{とする.}\right)$

2. 次の問に答えよ.

(1) a を実数とするとき次の行列 A の行列式を求めよ.

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 5 & -3a+4 & -2a+3 \\ -5 & 4a-4 & 3a-3 \end{pmatrix}$$

(2) 各 a について, A の階数 $\operatorname{rank} A$ を求めよ.

(3) $\operatorname{rank} A = 1$ のとき, 連立一次方程式

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

が解を持つように $(b_1,b_2,b_3)\neq(0,0,0)$ を一組あたえ, その (b_1,b_2,b_3) に対して連立方程式の解を全て求めよ.

3. $[0,1]$ 上で定義された実数値連続関数 $f(x)$ が次の 2 つの条件を満たすとする.

(1) $f(x)$ は狭義単調増加, すなわち, $x > y$ ならば $f(x) > f(y)$ である.

(2) ある $\alpha \in (0,1)$ に対して,

$$\begin{cases} x < \alpha \text{ ならば } & f(x) > x \\ x > \alpha \text{ ならば } & f(x) < x \end{cases}$$

が成立する.

このとき,

$$x_1 \in [0,1], \quad x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 1,\, 2,\, \ldots)$$

で定められた数列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ は, $n \to \infty$ のとき α に収束することを証明せよ.

4. 位相空間 X, Y の積空間 $X \times Y$ について, 次の問に答えよ.

(1) 積位相の定義を述べよ.

(2) X, Y がともに弧状連結であるとき, $X \times Y$ も弧状連結であることを示せ.

(3) X, Y がともにコンパクトであるとき, $X \times Y$ もコンパクトであることを示せ.

5. G を数直線 $\mathbf{R}$ の等長変換群とする:

$$G := \{h(x) = ax + b \mid a = \pm 1, b \in \mathbf{R}\}.$$

$f \in G$ を $x = 0$ に関する折り返し, $g \in G$ を $x = 1$ に関する折り返しとする. f, g で生成される G の部分群を H とするときつぎの問に答えよ.

(1) $f,\, g$ を座標を使って表せ.

(2) $f \circ g$ はどんな変換か?

(3) $x = 2$ に関する折り返しを f, g を使って表せ.

(4) $x = n,\, n \in \mathbf{Z}$ に関する折り返しは H に入ることを示せ.

(5) $f \circ g$ で生成する H の部分群は H の正規部分群であることを示せ.

(6) H の正規部分群 N で H/N が 3 次対称群となるものを求めよ.