平成 17 年度博士課程前期課程入学試験問題: 数学 II

神戸大学自然科学研究科数学専攻
平成 16 年 8 月 31 日
時間: 13:00 – 14:30

問題は **A** $\sim$ **N** の 13 問ある. 以下の問題から任意の 2 問を選んで解答せよ. 解答用紙は 1 問につき 1 枚ずつ用いよ.

A. 複素平面 $\boldsymbol{C}$ 上の有理型関数の可算個の族 $(f_\alpha(z))_{\alpha\in A}$ について次の条件が満たされるとき, 級数 $\sum_{\alpha\in A} f_\alpha(z)$ は $\boldsymbol{C}$ 上広義一様に絶対収束するという:

任意のコンパクト集合 $K \subset \boldsymbol{C}$ に対し, A の有限部分集合 A_K が存在して, $\alpha \notin A_K$ なる α に対して $f_\alpha(z)$ は K の近傍で正則であり, しかも級数 $\sum_{\alpha\in A\setminus A_K} f_\alpha(z)$ は K 上一様に絶対収束する.

$s = 2, 3, 4, \ldots$ に対して, 次の級数 $G_s(z)$ が上の意味で $\boldsymbol{C}$ 上広義一様に絶対収束することを示せ:

$$G_s(z) = \sum_{n\in\boldsymbol{Z}} \frac{1}{(z-n)^s}.$$

B. 複素関数 f が $\{z \in \boldsymbol{C} \mid \operatorname{Im} z > -1\}$ で正則であり, $\{z \in \boldsymbol{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ において $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ を満たすならば,

$$\frac{1}{i\pi}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{y-x}\,dy = f(x) \qquad x \in \boldsymbol{R}$$

が成立することを示せ. ただし, 左辺は主値積分

$$\frac{1}{i\pi}\lim_{\epsilon\downarrow 0}\left(\int_{-\infty}^{x-\epsilon} + \int_{x+\epsilon}^{\infty}\right)\frac{f(y)}{y-x}\,dy$$

を表す.

C. 次の問に答えよ.

(1) $D = \dfrac{d}{dx}$ として, 微分作用素 $A = D^2 + a_1(x)D + a_2(x)$, $B = D + b(x)$ を考える. $AB = D^3$ となるとき, $a_1(x)$ の満たす微分方程式を導け. ただし, $a_1(x)$, $a_2(x)$, $b(x)$ は x の関数で, 必要なだけ微分可能とする.

(2) 得られた微分方程式を, $a_1(x) = D(\log f(x))$ と変換して解け.

D. 以下で与えられた曲線族 C に直交する曲線族 $C^{\perp}$ の方程式を求め, C, $C^{\perp}$ の様子を (x,y) 平面上に描け.

(1) $C\ :\ y = ax^2$

(2) $C\ :\ xy = a$

(3) $C\ :\ y = ae^x$

ただし, (2) では $a \neq 0$ とする.

E. $f(x)$ を $\boldsymbol{R}$ 上の実数値 Lebesgue 可測関数とし, $A = \left\{x \in \boldsymbol{R} \,\middle|\, f(x) = 0\right\}$ とおく. また, Lebesgue 可測集合 B の Lebesgue 測度を $\mu(B)$ で表すこととする.

(1) $\displaystyle\lim_{\lambda\to\infty} e^{-\lambda|f(x)|^2}$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{\lambda\to\infty}\int_{\boldsymbol{R}} e^{-\lambda|f(x)|^2}\,dx$ が有限値ならば, これは $\mu(A)$ に等しいことを示せ.

(3) $\displaystyle\lim_{\lambda\to\infty}\int_{\boldsymbol{R}} e^{-\lambda|f(x)|^2}\,dx$ と $\mu(A)$ が等しくない場合があるかどうかを論ぜよ.

F. X を Hilbert 空間とし, X の内積を $(\ ,\ )$ で表すことにする. また, この内積から導かれた X のノルムを $\|\ \|$ で表すことにする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) U, U_n $(n \in \boldsymbol{N})$ は X における有界線形作用素で, 任意の $x \in X$ に対して

$$\|Ux\| = \|x\|, \qquad \|U_n x\| = \|x\| \quad (n \in \boldsymbol{N})$$

を満たしているとする. さらに, 任意の $x,\ y \in X$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}(U_n x, y) = (Ux, y)$$

が成立しているとする. このとき, 任意の $x \in X$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\|U_n x - Ux\| = 0$$

が成立することを示せ.

(2) M を X の閉部分空間とし, M の直交補空間を $M^{\perp}$ で表すことにする. W は X における有界線形作用素で,

$$\|Wx\| = \begin{cases} \|x\| & (x \in M) \\ 0 & (x \in M^{\perp}) \end{cases}$$

を満たしているとする. このとき, 任意の $x,\ y \in X$ に対して

$$(Wx, Wy) = (P_M x, P_M y)$$

が成立することを示せ. ただし, P_M は X における M の上への正射影作用素である.

G. 2 項分布 $B(n,p)$ の特性関数 $\varphi_p(t)$ とポアソン分布 $P(\lambda)$ の特性関数 $\psi_\lambda(t)$ をそれぞれ求めよ. ただし, 確率変数 X が 2 項分布 $B(n,p)$ に従うとき,

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad 0 \le k \le n$$

であり, また, 確率変数 Y がポアソン分布 $P(\lambda)$ に従うとき,

$$P(Y=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad 0 \le k$$

である. さらに, p が n の関数で, これを $p(n)$ と書くとき,

$$\lim_{n\to\infty} np(n) = \lambda$$

を満たしているとする. このとき, $B(n,p(n))$ の特性関数 $\varphi_{p(n)}(t)$ は, $n \to \infty$ のとき $\psi_\lambda(t)$ に各点 t で収束することを証明せよ.

H. 次の問に答えよ.

(1) 標準入力より入力された英単語を (データ構造) 2 分木を用いて格納していく C のプログラムを書きなさい. ここで, 入力の英単語列は空白を用いて区切られていると仮定してよい.

(2) 入力 `struct node malloc strcmp if for main` に対してどのような 2 分木が構成されるか?

(3) 2 分木の中に与えられた単語があるかどうか判定する検索関数の計算量について論じなさい.

I. 相異なる n 個の実数 $x_1,\dots,x_n$, および n 個の実数 $y_1,\dots,y_n$ に対し, $f(x_i)=y_i$ $(i=1,\dots,n)$ を満たす高々 $n-1$ 次の多項式を $O(n^2)$ の計算量で求めるアルゴリズムを記述し, 説明せよ. 計算量が確かに $O(n^2)$ であることも説明せよ. (実数の加減乗除を 1 ステップとみなす.)

J. 次の問題 (1) と (2) を考えよ。

(1) $r = r(t)$ は t に依存している関数であり,

$$\frac{dr}{dt} = r(1 - r^2)\ , \quad r(0) \in (0,1) \cup (1,\infty)$$

が成り立つ. このとき,

$$t = \log \frac{r}{\sqrt{|1 - r^2|}} + c$$

を示せ. （c が任意な定数である.） 次に

$$\lim_{t \to +\infty} r(t) = 1$$

を示せ.

(2) 常微分方程式系

$$\frac{dr}{dt} = r(1 - r^2)\ , \quad \frac{d\theta}{dt} = 1$$

を考える. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を定義して, 三つの初期条件

$$\alpha_1(0) = (2, 0)\ ,$$

$$\alpha_2(0) = (1, 0)\ ,$$

$$\alpha_3(0) = (1/2, 0)$$

を満たす上の系の三つの解 $\alpha_j(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0, \infty)$ を (x, y)-平面上に描け.

K. 複素 2 次元空間 $\boldsymbol{C}^2$ の部分空間 $X = \{(z, w) \in \boldsymbol{C}^2 \mid zw \neq 0\}$ の基本群を求めよ.

L. p を素数とし, $\mathbf{F}_p$ を $\#\mathbf{F}_p = p$ である有限体とする. つぎの問に答えよ.

(1) $\mathbf{F}_2$ 上の既約な 2 次多項式 $f(x) \in \mathbf{F}_2[x]$ を求めよ.

(2) $\mathbf{F}_p$ 上の既約かつモニックな 2 次多項式 $f(x) \in \mathbf{F}_p[x]$ はいくつあるか?

(3) $\mathbf{F}_p[x]$ において x^2+1 が既約になるための p に関する条件を求めよ.

M. K/F は可換体の 2 次分離拡大で, σ は恒等写像でない K の F 上の自己同型とする. V は K 上の n 次元ベクトル空間で, f は F 上のベクトル空間としての V の自己同型で,

$$f(av) = \sigma(a)f(v), \qquad \forall a \in K,\ \forall v \in V$$

を満たし, f^2 は恒等写像であるとする.

$$W = \{v \in V \mid f(v) = v\}$$

$$V_f = \{v + f(v) \mid v \in V\}$$

とすると, W, V_f は F 上の V の部分ベクトル空間で $\dim_F W = n$ かつ $V_f = W$ であることを示せ.

N. 2 次正方複素行列の全体 $M_2(\mathbf{C}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y, z, w \in \mathbf{C} \right\}$ を 4 次元アフィン空間 $\mathbf{C}^4$ と同一視する. 写像 $p : M_2(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}^2$ を

$$p(A) = p\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\right) = (\mathrm{tr}(A), \det(A)) = (k, l)$$

と定める.

また $(k,l) \in \mathbf{C}^2$ に対して, $V(k,l) = p^{-1}(k,l) = \left\{ A \in M_2(\mathbf{C}) \,\middle|\, \mathrm{tr}(A) = k, \det(A) = l \right\}$ と定める.

(1) $V(k,l)$ は $\mathbf{C}^3$ の超曲面と同型であることをしめせ.

(2) $V(k,l)$ が特異点をもつための必要条件をもとめよ.

(3) $V(k,l)$ は既約な代数的集合である事をしめせ.