平成18年度博士課程前期課程入学試験問題: 数学I

神戸大学自然科学研究科数学専攻
平成17年8月30日
時間：9:30–12:00

問題1から問題4の4問に解答せよ. 解答用紙は1問につき1枚とし, 解答した問題番号を明示すること.

問題1. 次の問に答えよ.

(1) 次の行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

の固有値を求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P をひとつ求めよ.

(3) 実数 x, y, z が $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ を満たすとき,

$$x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2yz$$

の最大値および最小値を求めよ.

問題2. R を積に関する単位元 1 をもつ積が可換とは限らない環とする. R の元 a に対して, $ab = ba = 1$ となる R の元 b が存在するとき, a を R の正則元という. $R^\times$ で R の正則元全体の集合をあらわす. 次の問に答えよ.

(1) $R^\times$ は積に関して群であることを示せ.

(2) $\mathbf{Z}$ を整数のなす環とするとき, $\mathbf{Z}^\times$ を求めよ.

(3) R を可換環とする. R の元を成分にもつ 2×2 行列全体の環

$$M_2(R) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in R \right\}$$

について

$$M_2(R)^\times = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, ad - bc \in R^\times \right\}$$

であることを示せ.

(4) p を素数とする. $R = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ とするとき,

$$M_2(R)^\times$$

の群の位数を求めよ.

問題3. 次の問に答えよ.

(1) (X, d) を距離空間とする. 距離関数 d の満たすべき性質（公理）を書け.

(2) 距離空間 (X, d) における点 $p \in X$ の ε 近傍を $N(p; \varepsilon) = \{x \in X | d(x, p) < \varepsilon\}$ で定める. X の 2 点 $p, q \in X$ と正の数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ に関する次の命題 (a), (b) を示せ.

(a) $d(p, q) + \varepsilon_2 < \varepsilon_1$ ならば $N(p; \varepsilon_1) \supset N(q; \varepsilon_2)$ である.

(b) $N(p; \varepsilon_1) \cap N(q; \varepsilon_2) \neq \emptyset$ ならば $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 > d(p, q)$ である.

(3) (2) の各主張 (a), (b) の逆は正しいか, 正しければ証明を, 誤りなら反例を示せ.

問題 4. 次の問に答えよ.

(1) 次の級数は収束することを示せ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

(2) $0 < a < 1$ とする. 次を示せ.

$$\int_0^a \int_0^a \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n dxdy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{2n}}{n^2}.$$

(3) 次を示せ.

$$\lim_{a \to 1-0} \int_0^a \int_0^a \frac{1}{1-xy} dxdy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

平成18年度博士課程前期課程入学試験問題: 数学II

神戸大学自然科学研究科数学専攻

平成17年8月30日

時間：13:00–14:30

問題は問題1から問題13の13問ある. 以下の問題から任意の2問を選んで解答せよ. 解答用紙は1問につき1枚とし, 解答した問題番号を明示すること.

問題 1. K を標数が2でない体とする. L は K の4次拡大で K 上2次の中間体をもつとする. 次の問に答えよ.

(1) $K[x]$ の既約多項式 $f(x) = x^4 + ax^2 + b$ が存在し, L は $f(x)$ の根 α をもちいて $K(\alpha)$ とかけることを示せ.

(2) (1) の b が K の平方数となるとき, L/K の中間体の個数を求めよ.

問題 2. a を複素パラメータとするとき

$$F_a(x,y,z) = xyz + x^2 + y^2 + z^2 + a - 4$$

なる多項式を考える. $F_a(x,y,z)$ で定義される $\mathbf{C}^3$ のアファイン超曲面を $X_a := \{F_a(x,y,z) = 0\}$ とおく. X_a が特異点を持つときの a の値を定め, その各 a について特異点の座標をすべて求めよ.

問題 3. $\mathbf{R}^3$ 内の曲面 S を座標 (x,y) を使って, 次のように与える.

$$S(x,y) = ((2+\cos x)\cos y, (2+\cos x)\sin y, \sin x) \ ,$$
$$(x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 0 \leq x < 2\pi, 0 \leq y < 2\pi\} \ .$$

この座標 (x,y) に対する第一基本形式の行列を

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

と書く.

(1) $g_{12} = g_{21} = 0$ を示せ. g_{11} と g_{22} を具体的に計算せよ.

(2) $g_{12} = g_{21} = 0$ のとき, ガウス曲率 K と面積の二次形式 dA は

$$K = \frac{-1}{2\rho}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial g_{11}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial g_{22}}{\partial x}\right)\right) \ , \quad dA = \rho dxdy \ , \quad \rho = \sqrt{g_{11}g_{22}}$$

となる. 曲面 S について, K を計算せよ.

(3) $\int\int_D K dA$ を計算せよ.

(4) 曲面 S の概形をかいて, K がどこで正または負になるかを表せ.

問題 4. 3次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ の部分空間として次の (1), (2) の基本群を計算せよ.

(1) $X = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | x^2 + y^2 \neq 0\}$.

(2) $Y = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | (x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2) \neq 0\}$.

問題 5. 座標 z を持つ複素平面 $\mathbf{C}$ に無限遠点を付け加えて, $\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ と書く. 写像 $f:\mathbf{C}\cup\{\infty\}\to\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ が

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d},\quad a,b,c,d\in\mathbf{C},\ ad-bc\neq 0$$

と表わされるとき, f をメービウス変換と呼ぶ. $\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ の点 p に対して $f(p)=p$ となるとき, p を f の固定点と呼ぶ.

(1) ちょうど一つの固定点をもつメービウス変換の例を具体的に与えよ.
(2) ちょうど二つの固定点をもつメービウス変換の例を具体的に与えよ.
(3) 恒等写像ではないメービウス変換 f はすくなくとも一つの固定点をもち, 多くとも二つであることを証明せよ.

問題 6. 次のような積分作用素 H を考える:

$$(Hf)(x)=\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y)}{y-x}dy.$$

ここで, 右辺は主値積分,

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\left(\int_{-\infty}^{x-\epsilon}+\int_{x+\epsilon}^{\infty}\right)\frac{f(y)}{y-x}dy$$

を表す.

(1) $f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$ が $f\in L^1(\mathbf{R})\cap C^1(\mathbf{R})$ を満たすとき, $(Hf)(x)$ はすべての $x\in\mathbf{R}$ に対して有限確定値をとることを証明せよ.
(2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ に対して, $(Hf)(x)$ を求めよ.

問題 7.

(1) $K[X]$ を体 K 上の一変数多項式環とする. $f_1,f_2\in K[X]\setminus\{0\}$ に対し, $g=\mathrm{GCD}(f_1,f_2)$ および, $af_1+bf_2=g$ を満たす $a,b\in K[X]$ を求めるアルゴリズムを記述し, その正当性を示せ. ただし, 多項式 u を v で割った商を求める演算 $\mathrm{quotient}(u,v)$ をもちいてよい.
(2) p を素数とする. p 元体 $\mathrm{GF}(p)$ の元を $p-1$ 以下の非負整数で表すとする. このとき, $a\in\mathrm{GF}(p)\setminus\{0\}$ に対し $1/a\in\mathrm{GF}(p)$ を求めるプログラムを記述せよ. 言語は問わない. p は, 整数の積がオーバーフローを起こさない程度に小さいとしてよい.

問題 8. 独立確率変数列 $X_1, X_2, \ldots$ について $EX_i=0$, $EX_i^2=M<\infty$, $EX_i^4=L<\infty$ が成り立っているとする.

(1) $i\leq j\leq k\leq l$ とする. $i\neq j$ または $k\neq l$ なら $EX_iX_jX_kX_l=0$ であることを示せ.
(2) $S_N=X_1+\cdots+X_N$ とするとき ES_N, ES_N^4 の値を求めよ.
(3) $E((S_N/N)^4)$ の値を求め, $\sum_{N=1}^{\infty}E((S_N/N)^4)<\infty$ を示し, $S_N/N\to 0$ a.s. であることを導け.

問題 9.

```
#include <stdio.h>
struct node {
  struct node *left;
  struct node *right;
  int p;
};
struct node *talloc(int a) {
  struct node *t;
  t = (struct node *) malloc(sizeof(struct node));
  t->left = t->right = NULL; t->p = a;
  return t;
}
void insert(int a,struct node *t) {
  if (a <= t->p) {
    if (t->left == NULL) t->left=talloc(a);
    else insert(a,t->left);
  }else{
    if (t->right == NULL) t->right=talloc(a);
    else insert(a,t->right);
  }
}
```

上は C 言語で 2 分木を実現するためのプログラムの一部である. 次の問に答えよ.

(1) 標準的な 32 bit コンピュータでは `struct node` は何バイトのメモリ領域を占めるか? 理由も込めて答えよ.

(2) 関数 `talloc` および `insert` はどのように動作するか? 図や例も用いて詳しく説明せよ.

(3) 配列に格納された 10 個の数を 2 分木を用いて小さい順にソートして出力するプログラムおよびその説明を書け.

問題 10. f は $(0,a)$ 上の可積分関数とする.

(1) $0 < x < a$ に対して次の積分が有限な値をとることを示せ.

$$\int_x^a \frac{f(t)}{t}\,dt$$

(2) (1) の積分を $g(x)$ とおくと, g も $(0,a)$ 上可積分であることを示せ.

(3) 次の等式を示せ.

$$\int_0^a g(x)\,dx = \int_0^a f(t)\,dt$$

問題 11. 次の実積分を複素積分をもちいて求めよ.

$$(1)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2},\qquad (2)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^4},\qquad (3)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^6}.$$

問題 12. $D := \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z| < r\}$ (r は正定数) とする. 次の小問 (1), (2) に答えよ.

(1) $A(z)$ を D で正則な関数を成分とする 2×2 行列とし, $X = X(z)$ を $X' = A(z)X$ ($' := \frac{d}{dz}$) を満たす D において正則な関数を成分とする 2×2 行列とする. このとき $f(z) := \det X(z)$ は

$$f'(z) = t(z)f(z)$$

を満たすことを示せ. ただし $t(z) := \mathrm{Tr}\, A(z)$ は $A(z)$ のトレースである.

(2) $X(z)$ を D で一価正則な関数を成分とする 2×2 行列で $\det X(z) \neq 0$ $(z \in D)$ とする. もし $X(z)$ のすべての成分が $z = 0$ を高々極とするならば, $\mathrm{Tr}\,[X'(z)X(z)^{-1}]$ は $z = 0$ で高々1 位の極をもつことを示せ.

問題 13. X は Hilbert 空間で, $X \neq \{0\}$ とする. $T \in \mathcal{B}(X)$ は, 任意の $x, y \in X$ に対して $(Tx, y) = (x, Ty)$ かつ $(Tx, x) \geq 0$ を満たしているとする. ただし, $\mathcal{B}(X)$ は X から X への有界線形作用素全体の集合, $(\cdot,\cdot)$ は X における内積である. このとき,

$$\|T\|_{\mathcal{B}(X)} = \sup_{\|x\|=1} (Tx, x)$$

が成立する. このことを次の設問に従って示せ. ただし, $\|x\| \equiv \sqrt{(x,x)}$ は X における x のノルム, $\|T\|_{\mathcal{B}(X)} \equiv \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$ は $\mathcal{B}(X)$ における T のノルムである.

(1) $\sup_{\|x\|=1} (Tx, x) \leq \|T\|_{\mathcal{B}(X)}$ を示せ.

(2) 任意の $x, y \in X$ に対して

$$|(Tx, y)| \leq \sqrt{(Tx, x)}\sqrt{(Ty, y)}$$

が成立することを示せ.

(3) (2) で示した不等式を用いて $\|T\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \sup_{\|x\|=1} (Tx, x)$ を示せ.