平成19年度博士課程前期課程入学試験問題: 数学 I

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
平成18年8月30日
時間：9:30–12:00

問題1から問題5の5問に解答せよ. 解答用紙は1問につき1枚とし, 解答した問題番号を明示すること.

問題 1. a を実数とし,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

とおく. 次の問に答えよ.

(1) A の行列式を求めよ.

(2) 各 a について, A の階数 $\mathrm{rank}A$ を求めよ.

(3) $\mathrm{rank}A = 2$ のとき, A の固有値を求めよ.

(4) $\mathrm{rank}A = 1$ のとき, A の固有値と A の最小多項式を求めよ.

問題 2. 群 G を

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

が生成する一般線形群 $GL(2, \mathbf{R})$ の部分群として定める. 次の問に答えよ.

(1) G の元 A の位数を求めよ.

(2) G の位数を求めよ.

(3) G の元 B の（群 G における）共役をすべて求めよ.

(4) G の部分群をすべて求めよ.

問題 3. 次の問に答えよ.

(1) 連続関数 $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ が $(x, y) \neq (0, 0)$ のとき正であり, なおかつ, すべての $c > 0$ と実数の組 (x, y) について

$$f(cx, cy) = cf(x, y)$$

を満たしているものとする. このとき, ある正の数 $a \leq b$ がとれて

$$a\sqrt{x^2 + y^2} \leq f(x, y) \leq b\sqrt{x^2 + y^2}$$

が成り立つことを示せ.

(2) $f(x, y) = x^3 + x - 4xy - 2y^2$ の極値とそれを取る (x, y) の値をすべて求めよ.

(3) 立体図形

$$V :\ x, y, z \geq 0,\ \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 1$$

の体積を計算せよ.

問題 4. 実数を項にもつ級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ について, 次の問に答えよ.

(1) 数列 $\{n^2 a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある有限な値に収束するとき, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束することを示せ.

(2) 数列 $\{n a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある有限な値に収束し, その値は 0 でないとする. このとき, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散することを示せ.

問題 5. X をコンパクトな位相空間, f を X 上定義された実数値連続関数とする.

(1) 任意の実数 t に対して集合 $A_t = \{\, x \in X \mid f(x) < t \,\}$ は開集合であることを示せ.

(2) $X = \bigcup_{t \in \mathbf{R}} A_t$ であることを示せ.

(3) 実数 t が存在して $X \subset A_t$ が成り立つことを示せ.

平成 19 年度博士課程前期課程入学試験問題: 数学 II

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
平成 18 年 8 月 30 日
時間：13:00–14:30

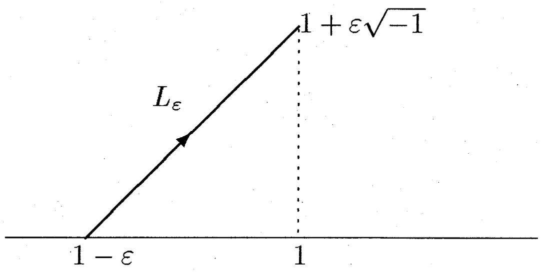
問題は問題 1 から問題 16 の 16 問ある. 以下の問題から任意の 2 問を選んで解答せよ. 解答用紙は 1 問につき 1 枚とし, 解答した問題番号を明示すること.

問題 1. 次の問に答えよ.

(1) 次の関数の $z=1$ での留数を求めよ.

$$\frac{e^{z^2}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)}.$$

(2) $0<\varepsilon<1$ とし, 複素平面上の積分路 L_ε を下の図のような, 始点 $1-\varepsilon$ から終点 $1+\varepsilon\sqrt{-1}$ に至る線分とする.



このとき, 次の問に答えよ.

(a) 次の複素積分の値を求めよ.

$$\int_{L_\varepsilon} \frac{dz}{z-1}.$$

(b) $f(z)$ を $|z-1|<1$ 上の正則関数とするとき, 次の値を求めよ.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{L_\varepsilon} f(z)dz.$$

(c) 次の値を求めよ.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{L_\varepsilon} \frac{e^{z^2}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)}\,dz.$$

問題 2. 双曲線関数を $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ とする. 次の問に答えよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$, $\dfrac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$, $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ を示せ.

(2) $\mathbf{R}^2 \ni (x, y)$ に対して, 写像

$$f(x,y) = \left(\frac{\cos y}{\cosh x}, \quad \frac{\sin y}{\cosh x}, \quad \tanh x\right) \quad \in \mathbf{R}^3$$

により, 曲面を定める. この曲面 f がどのような曲面になるかを述べ, それを証明せよ.

(3) この曲面 f の第1基本形式を計算し, 2次形式 $dx^2 + dy^2$ のスカラー倍であることを示せ.

(4) $\mathbf{R}$ 上の関数 $p(x)$ と $q(x)$ を用い, 曲面を

$$g(x,y) = (p(x)\cos y, \quad p(x)\sin y, \quad q(x)) \quad \in \mathbf{R}^3$$

と定める. ただし, $p(x) > 0$ とする. このとき, この曲面 g の第1基本形式が2次形式 $dx^2 + dy^2$ のスカラー倍になるためには, $(dp/dx)^2 + (dq/dx)^2 = p^2$ が必要十分であることを示せ.

問題 3. a を複素数とし, x, y, z の多項式

$$F(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 + 1 - 4axyz$$

で定義される $\mathbf{C}^3$ の超曲面

$$X_a = \{(x,y,z) \in \mathbf{C}^3 \mid F(x,y,z) = 0\}$$

を考える.

(1) $a^4 \neq 1$ のとき, X_a は非特異な代数多様体であることを示せ.

(2) $a = 1$ のとき, X_a の特異点を (α, β, γ) と置くと, $\alpha\beta\gamma = 1$, $\alpha^4 = \beta^4 = \gamma^4 = 1$ を満たすことを示せ.

(3) $a = 1$ のとき, X_a の特異点をすべて求めよ.

問題 4. $\mathcal{G}$ を一般線形リー代数 $gl_n(C)$ の部分リー代数（リー環）とする. $\mathcal{G}$ の元 X に対し, $\mathcal{G}$ から $\mathcal{G}$ への写像 $ad(X)$ を

$$ad(X)(Z) = [X, Z] \in \mathcal{G}\,, \quad Z \in \mathcal{G}\,,$$

と定める. 元 X, Y に対して, 合成写像 $ad(X)ad(Y)$ のトレース (跡) を

$$B(X,Y) = \mathrm{Tr}(ad(X)ad(Y))$$

とかく. このとき, 次の問に答えよ.

(1) $ad(X)$ は X について線形であることを示せ.

(2) $B(X,Y) = B(Y,X)$ を示せ.

(3) $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{G} = sl_2(C)$ とするとき, 集合 $\{Y \in \mathcal{G} \mid B(X,Y) = 0\}$ を求めよ.

問題 5. 2 次元球面から 3 点除いた位相空間を X_1, 射影平面から 2 点除いた位相空間を X_2, トーラスから 1 点除いた位相空間を X_3, クラインの壷から 1 点除いた位相空間を X_4 とするとき, 次の問に答えよ.

(1) X_1, X_2, X_3, X_4 の基本群をそれぞれ求めよ.

(2) X_1, X_2, X_3, X_4 は同相かどうか調べよ.

問題 6. 次の問に答えよ.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を収束する正項級数とし, また $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は実数列で $b_n \neq 0$ $(n = 1, 2, ...)$ なるものとする. 十分大きなすべての n に対して

$$\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

が成り立つならば, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ も収束することを示せ.

(2) $a_n = n^A$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $A < -1$ とする. 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することと,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{A}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

が十分大きなすべての n に対して成り立つことを示せ. ただし, $r_n = O(1/n^2)$ は ある正定数 C をとると $|r_n| \leq C/n^2$ が成り立つことを意味する.

(3) $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は実数列で $b_n \neq 0$ $(n = 1, 2, ...)$ なるものとする. ある $B < -1$ に対して

$$\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = 1 + \frac{B}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

が十分大きなすべての n に対して成り立つならば, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束することを示せ.

(4) α, β を $\beta - \alpha > 1$ を満たす正定数とする. このとき級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}$$

は収束することを示せ.

問題 7.

F は標数が 2 でない体とする.

(1) M/F が代数拡大で, $\alpha, \beta \in M$ で $\alpha^2 = a \in F$, $\beta^2 = b \in F$ とする. このとき, $F(\alpha) = F(\beta)$ なら ab は F の平方数であることを示せ.

(2) -1 は F の平方数ではないとする. L/F を 4 次の巡回拡大とする.

(a) L/F は自明でない中間体 K をただひとつ持つことを示せ.
$K = F(\gamma)$, $\gamma^2 = c \in F$, また $L = K(\xi)$, $\xi^2 = p + q\gamma$, $p, q \in F$ とする.

(b) ξ は F 上 4 次の元であることを示せ.

(c) c は F で 2 個の平方数の和に書けることを示せ.

問題 8. n を 0 以上の整数とし, 2 階線形常微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \left(1 - \frac{2n+1}{x}\right)\frac{dy}{dx} + \frac{n^2}{x^2}y = 0 \qquad (\mathrm{E}_n)$$

を考える.

(1) $n = 0$ のとき, 方程式 (E_n) の解を求めよ.

(2) 上で求めた解のうち, $x = 0$ で正則でないものを y_0 と書く. このとき

$$\begin{aligned}
&f_0 = 1, \qquad f_1 = \frac{dy_0}{dx}, \qquad g_0 = 1 \\
&f_{n+1} = \frac{1}{f_{n-1}}\left(\frac{d^2 f_n}{dx^2} f_n - \left(\frac{df_n}{dx}\right)^2\right), \quad n = 1, 2, \ldots \\
&g_{n+1} = \frac{1}{f_n}\left(\frac{df_{n+1}}{dx} g_n - f_{n+1}\frac{dg_n}{dx}\right), \quad n = 0, 1, \ldots
\end{aligned}$$

によって $f_n, g_n \, (n \geq 0)$ を定めれば, $y = \dfrac{g_n}{f_n}$ が方程式 (E_n) の解になることを示せ.

問題 9. n を 2 以上の整数とする. n 次の正方行列 A, B は, ある $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し

$$AB - BA = \lambda B$$

を満たすとする. $t \in \mathbb{C}$ に対し

$$X(t) = e^{tA} B e^{-tA}$$

とおくとき, 次の問に答えよ. (但し, n 次の正方行列 M に対し

$$e^M = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} M^k, \qquad I: \ n \text{ 次の単位行列}$$

とおく.)

(1) $X(t)$ は次の微分方程式を満たすことを示せ.

$$\frac{d}{dt} X(t) = \lambda X(t), \qquad X(0) = B$$

(2) $X(t)$ を λ と B を用いて表せ.

問題 10. 未知関数 $f(t), \ g(t)$ に対する微分方程式

$$f' = g^2, \quad g' = -fg \qquad \left({}' = \frac{d}{dt}\right)$$

を, 初期条件 $f(0) = 0, \ g(0) = 1$ の下に解け.

問題 11. 複素平面 $\mathbb{C}$ の開集合 D に対して, D 上の正則関数の全体を $\mathcal{O}(D)$ で表し, D 上の正則関数のうち D に零点をもたないものの全体を $\mathcal{O}^*(D)$ で表す. $r_0 < r_1$ なる正の実数をとり

$$U_0 = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| < r_1 \,\}, \quad U_1 = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| > r_0 \,\}, \quad U = U_0 \cap U_1$$

とおく.

(1) 任意の $\varphi \in \mathcal{O}(U)$ に対して, $\varphi_0 \in \mathcal{O}(U_0)$ と $\varphi_1 \in \mathcal{O}(U_1)$ で, 次の条件を満たすものが存在することを示せ.

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + \varphi_1(z) \quad (z \in U), \qquad \lim_{z\to\infty} \varphi_1(z) = 0.$$

(2) $f \in \mathcal{O}^*(U)$ とし, $r_0 < \rho < r_1$ なる実数 ρ に対して

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|\zeta|=\rho} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta = n \in \mathbb{Z}$$

と仮定する (但し, 積分路は円周 $|\zeta| = \rho$ を正方向に 1 周するもの). このとき, $g_0 \in \mathcal{O}^*(U_0)$ と, $g_1 \in \mathcal{O}^*(U_1)$ で, 次の条件を満たすものが存在することを示せ.

$$f(z) = g_0(z)\, z^n\, g_1(z) \quad (z \in U), \qquad \lim_{z\to\infty} g_1(z) = 1$$

問題 12. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ と確率変数 X が定義されており, X_n は X に確率収束しているとする. すなわち, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} P\big[|X_n - X| > \varepsilon\big] = 0$$

が成り立っているものとする. このとき, 次の問に答えよ.

(1) ある正の定数 M があって $P[|X_n| \le M] = 1$ がすべての $n \ge 1$ について成り立っているなら, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は一様有界という. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$P\big[|X| \ge M + \varepsilon\big] = 0$$

を示し, これより, $|X| \le M$ a.s. を導け.

(2) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ が一様有界なとき

$$\lim_{n\to\infty} E\big[|X_n - X|\big] = 0 \qquad (*)$$

が成り立つことを証明せよ.

(3) 一般に, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ が次の一様可積分性の条件を満たすとき, $(*)$ が成り立つことを証明せよ.

$$\lim_{M\to\infty} \sup_{n\ge 1} E\big[|X_n| 1_{\{|X_n|>M\}}\big] = 0$$

問題 13. $t > 0$ に対して, $F(t) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-tx} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx$ とおく. 次の問に答えよ.

(1) $F'(t) = -\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-tx} \sin^2 x\, dx$ を示し, $F'(t)$ を求めよ.

(2) $\lim_{t\to\infty} F(t) = 0$ を示せ.

(3) $F(t)$ を求めよ.

問題 14. 正のパラメータ t を持つ $\mathbb{R}$ 上の関数 $G_t(x)$ を

$$G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}$$

で定義する．このとき, 次の問に答えよ．

(1) $t, s > 0, x \in \mathbb{R}$ に対して, $G_t * G_s(x) = G_{t+s}(x)$ が成立することを示せ．ただし, $G_t * G_s(x)$ は

$$G_t * G_s(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G_t(x-y) G_s(y)\, dy$$

で定義されるものとする．

(2)

$$\lim_{t \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} |G_t * G_1(x) - G_1(x)|\, dx = 0$$

を示せ．

(3)

$$\lim_{t \to +0} \sup_{x \in \mathbb{R}} |G_t * G_1(x) - G_1(x)| = 0$$

を示せ．

問題 15. 次はリスト構造を用いて一変数多項式を扱うためのプログラムの一部である．

```
struct monom {
  int c;  int e;  /* c は係数. e は x の指数 */
  struct monom *next;
};
struct monom * newMonom(int c, int e) {
  struct monom *f;
  f = (struct monom *) malloc(sizeof(struct monom));
  f->c = c;  f->e = e;  f->next = NULL; return f;
}
struct monom *append(struct monom *p, struct monom *q) {
  struct monom *r;
  r = p;
  while (p->next != NULL) p = p->next;
  p->next = q;   return r;
}
```

次の問に答えよ．

(1) 構造体 monom は標準的な 32 ビット計算機で何バイトの大きさか? 理由も含めて答えよ．

(2) 上のプログラムの関数を用いて, 多項式 $x^{100} + 2x^{10} + 1$ を生成するプログラムを書きなさい．

(3) 構造体 monom のリストとして表現された多項式を表示する関数を書きなさい．

問題 16. $R = \mathbf{Q}[x_1, \ldots, x_n]$ とする．$f \in R$ に対し，f が項 ax_i $(a \in \mathbf{Q})$ を含むならば $c(f, x_i) = a$，含まないならば $c(f, x_i) = 0$ と定義する．次のアルゴリズムについて問に答えよ．

入力：$F = \{f_1, \ldots, f_m\} \subset R \quad (f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j,\ a_i \in \mathbf{Q})$

出力：$(G, V) \quad (G \subset R,\ V \subset \{x_1, \ldots, x_n\})$

$R \leftarrow F$; $G \leftarrow \emptyset$; $V \leftarrow \emptyset$

while $(R \neq \{0\})$ do

  $x_i \leftarrow R$ に現れる変数のうちで添字が最小のもの

  $h \leftarrow x_i$ を含む R の元; $V \leftarrow V \cup \{x_i\}$; $G \leftarrow G \cup \{h\}$

  $R_{new} \leftarrow \emptyset$

  for each $f \in R$ do

    $f_{new} \leftarrow f - \frac{c(f, x_i)}{c(h, x_i)} h$

    $R_{new} \leftarrow R_{new} \cup \{f_{new}\}$

  end for

  $R \leftarrow R_{new}$

end while

return (G, V)

(1) 入力 F と出力 G は R において同じイデアル I を生成することを示せ．

(2) $f \in I$ かつ f が V に属する変数を含まないならば $f = 0$ であることを示せ．