平成 20 年度博士課程前期課程入学試験問題：数学 I

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
平成 19 年 8 月 29 日
時間：9:30–12:00

問題 1 から問題 4 の 4 問 に解答せよ．解答用紙は 1 問につき 1 枚とし，解答した問題番号を明示すること．

問題 1． a を実数とし, 3 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a^2 \\ 1 & a^2 & 1 \end{pmatrix}$$

で定義する.

(1) A の行列式を計算せよ.

(2) A の階数を a によって場合分けして求めよ.

(3) A の階数が 2 のとき, A の固有値を求め, それぞれの固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

問題 2． 2 以上の自然数 n に対して, 可換環 $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ と, 自然な環準同型 $\pi_n : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ を考える. $a \in \mathbf{Z}$ に対して, $\pi_n(a) = [a]_n$ とおく.

(1) 可換環 $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ の乗法に関する可逆元全体を $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$ とおく. $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$ は乗法に関して群になることを示せ.

(2) $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times = \{[a]_n \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \mid a$ と n は互いに素 $\}$ を示せ.

(3) m, n が互いに素な 2 以上の自然数のとき, 写像 $\pi_{m,n} : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ を $\pi_{m,n}(a) := ([a]_m, [a]_n)$ と定める. $\pi_{m,n}$ は環の全射準同型であることを示せ. また環の同型 $\mathbf{Z}/mn\mathbf{Z} \simeq \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ を示せ.

(4) m, n が互いに素な 2 以上の自然数のとき,

$$(\mathbf{Z}/mn\mathbf{Z})^\times \simeq (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^\times \times (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$$

を示せ.

(5) $(\mathbf{Z}/144\mathbf{Z})^\times$ の位数を求めよ.

問題 3.

(1) X を集合, $\mathcal{U}=\{U\}$ を X の部分集合のある族とする. X が $\mathcal{U}$ を開集合系とする位相空間となるための定義を述べよ.

(2) Y を位相空間 X の部分集合として, Y の部分集合の族 $\mathcal{U}_Y$ を

$$\mathcal{U}_Y=\{Y\cap U \mid U\in\mathcal{U}\}$$

で定義する. $\mathcal{U}_Y$ が Y に位相を与えることを示せ. （部分集合 Y に対して, この位相を与えて位相空間とみなす. これを部分位相空間とよぶ.）

(3) X を位相空間, Y をその部分位相空間とする. このとき以下の命題 (i), (ii), (iii) の真偽を調べ, 真ならば証明し, 偽ならば説明付きで反例を挙げよ.

(i) X がハウスドルフならば, Y もハウスドルフである.

(ii) X が連結ならば, Y も連結である.

(iii) X がコンパクトならば, Y もコンパクトである.

問題 4.

(1) 閉区間 $[0,1]\subset\mathbf{R}$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が

$$f_n(x)=e^{-nx} \qquad (x\in[0,1])$$

で与えられたとする．このとき，$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ を求め，この収束が $[0,1]$ 上一様収束でないことを示せ.

(2) $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ を $[0,1]$ 上の連続関数列とする．任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある $N\in\mathbf{N}$ が存在して，

$$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon \qquad \text{for all } n,m>N$$

が成り立つとする．このとき，任意の $x\in[0,1]$ に対して $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ が収束することを示せ.

(3) (2) のとき，$\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は $[0,1]$ 上一様収束することを示し，$\lim_{n\to\infty}f_n$ が $[0,1]$ 上の連続関数であることを示せ.

平成 20 年度博士課程前期課程入学試験問題：数学 II

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
平成 19 年 8 月 29 日
時間：13:00–14:30

問題は問題 A から問題 K の 11 問ある．以下の問題から任意の 2 問を選んで解答せよ．解答用紙は 1 問につき 1 枚とし，解答した問題の記号を明示すること．

問題 A． F は標数が 2 の可換体とする.

(1) β が F 上分離的な元で $F(\beta)/F$ は 2 次拡大とする. このとき, $a, b \in F, a \neq 0$ が存在して, β は $x^2 + ax + b = 0$ の根となることを示せ. またこのとき, $\alpha = \beta/a$ の満たす 2 次方程式を求めよ.

(2) K/F は 2 次拡大で, K は自明でない F 上の自己同型 σ を持つとする. $\sigma(\alpha) = \alpha + 1$ を満たす K の元 α が存在して, $K = F(\alpha)$ と書けることを示せ.

問題 B． $R = \mathbf{C}[t, \frac{1}{t}]$ を 1 変数ローラン多項式環，$S = \mathbf{C}[t^2 + \frac{1}{t^2}]$ をその部分環とする．

(1) R は S 上整であることを示せ.

(2) R の商体を L, S の商体を K とおくとき，L/K はガロア拡大であることを示せ.

(3) L/K の中間体をすべて求めよ.

(4) (3) で求めた中間体 M のそれぞれに対し, 整閉包

$$T_M := \{a \in M |\ a \text{ は } S \text{ 上整}\}$$

を求めよ.

問題 C． m, n は異なる自然数として, 複素平面内の曲線 $C_{m,n} : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ を

$$C_{m,n}(t) = \frac{m+n}{m} e^{i(m-n)t} + \frac{m-n}{m} e^{i(m+n)t}, \qquad t \in \mathbf{R},$$

で定義する.

(1) 次の二つの場合に, この曲線の概形を描け：$(m, n) = (1, 2)$, $(m, n) = (2, 1)$.

(2) 曲線 $C_{1,2}$ の $-\pi/4 \le t \le \pi/4$ の部分 $\mathcal{I}$ の長さを求めよ.

(3) (2) における $\mathcal{I}$ 上の曲率関数 $\kappa(t) > 0$ を計算せよ. また, $\kappa(t)$ の最大値と最小値, およびそれらを与える t の値を求めよ.

問題 D.　次の問に答えよ.

(1) 2 次元ユークリッド空間の部分空間 $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 | x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0\}$ の基本群を計算せよ.

(2) 3 次元ユークリッド空間の部分空間 $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 | x_1 x_2 x_3 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1) = 0\}$ の基本群を計算せよ.

問題 E.　$\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in \mathbf{R}\}$ を n 次元ユークリッド空間とする.

(1) 写像 $f : [0,1] \to \mathbf{R}^2$ に対して, 関数 $g : [0,1] \to \mathbf{R}^1$ を, 点 $f(t)$ $(t \in [0,1])$ と原点 $(0,0)$ との距離として定義する. f が連続ならば g も連続であることを示せ.

(2) $\mathbf{R}^2$ において, 点 P を原点 $(0,0)$ から点 $(2,0)$ へ連続的に動かすと, その途中で P は円周 $\{(x_1, x_2) | x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ と必ず共有点を持つことを示せ.

(3) $\mathbf{R}^3$ において, 点 Q を原点 $(0,0,0)$ から点 $(2,0,0)$ へ連続的に動かす. このとき, 途中で円周 $\{(x_1, x_2, x_3) | x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}$ と共有点を持たないように, 点 Q を動かすことができることを示せ.

問題 F.　a, b を相異なる複素数, R を $R > |a|$, $R > |b|$ なる実数とする.

(1) 全複素平面で正則な関数 $f(z)$ について, 積分

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz$$

を求めよ. ここで積分路 C は反時計回りの円周 $|z| = R$ とする.

(2) 全複素平面で有界な正則関数は定数である (Liouville の定理). この定理を, (1) の積分の値を評価することにより証明せよ.

問題 G.　X を空でないノルム空間とし，$\|\cdot\|$ をその上のノルムとする．Y を X の閉部分空間とし，X において写像 $d(\cdot, Y) : X \to [0, +\infty)$ を

$$d(x, Y) = \inf\{\, \|x - y\| : y \in Y \,\} \quad (x \in X)$$

で定義する．次の問に答えよ.

(1) $x \in X$ に対して，$d(x, Y) = 0$ と $x \in Y$ とは同値であることを示せ.

(2) 任意の $x_1, x_2 \in X$, $y_1, y_2 \in Y$ に対して

$$d(x_1 + x_2, Y) \le \|x_1 - y_1\| + \|x_2 - y_2\|$$

を示すことによって，次の不等式を示せ.

$$d(x_1 + x_2, Y) \le d(x_1, Y) + d(x_2, Y)$$

(3) $|d(x_1, Y) - d(x_2, Y)| \le \|x_1 - x_2\|$ が成り立つことを示せ.

問題 H. $f(x)$ を x の高々2次の多項式，$\rho(x)$ を0にならない C^∞ 級関数とし，$\dfrac{\rho'(x)}{\rho(x)}f(x)$ が高々1次の多項式であったとする．ここで，$'$ は微分を表す．以下の問に答えよ．

(1) 自然数 n に対し，$\dfrac{f(x)^n}{\rho(x)}\dfrac{d^n}{dx^n}\rho(x)$ が高々 n 次の多項式であることを示せ．

(2) 自然数 n に対し，
$$p_n(x) = \frac{1}{\rho(x)}\frac{d^n}{dx^n}\bigl(\rho(x)f(x)^n\bigr)$$
とおくとき，$p_n(x)$ が高々 n 次の多項式であることを示せ．

(3) $\rho(x) = e^{-x^2}$，$f(x) = 1$ のとき，(2) で定義された $p_n(x)$ が以下の漸化式をみたすことを示せ．
$$p_{n+1}(x) = p_n'(x) - 2xp_n(x), \qquad p_{n+1}(x) + 2xp_n(x) + 2np_{n-1}(x) = 0.$$

問題 I. 関数 $F(t)$ を次のように定める．
$$F(t) = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2tx\,dx.$$
以下の問に答えよ．

(1) $F'(t) = -2tF(t)$ であることを示せ．

(2) $F(t)$ を求めよ．ただし，$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2$ であることを用いてよい．

(3) $\displaystyle\int_0^u F(t)\,dt$ を考えることにより，以下の式を示せ．
$$\int_0^\infty e^{-x^2}\frac{\sin 2ux}{x}\,dx = \sqrt{\pi}\int_0^u e^{-t^2}\,dt$$

問題 J. 確率変数 X がパラメーター $\lambda > 0$ の Poisson 分布に従うとは，
$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$
であることである．独立確率変数列 $\{X_n\}$ が与えられ，X_n はパラメーター $\lambda_n > 0$ の Poisson 分布に従うとする．

(1) $E(X_1 + \cdots + X_n)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \lambda_n < \infty$ なら，$\displaystyle\sum_{n=1}^\infty X_n$ は概収束し，確率1で有限値であることを示せ．

(3) (2) のとき，$P\Bigl(\displaystyle\sum_{n=1}^\infty X_n = k\Bigr)$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ を求めよ．

問題 K. 整数の有限集合を, リストで保持し, 操作することを考える.

(1) `int` 型の有限集合をリストで表現するためのデータ構造を C 言語により定義せよ.

(2) (1) で定義したデータ構造に対して要素の追加, 削除を行う関数を C 言語により記述せよ. ただし, 入力および出力は, 重複のない, 昇順のリストであるとする.