平成21年度博士課程前期課程入学試験問題：数学 I

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
平成20年8月27日
時間：9:30–12:00

問題 1 から問題 5 の 5 問 に解答せよ．解答用紙は 1 問につき 1 枚とし，解答した問題番号を明示すること．

問題 1. $\phi_a : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ を行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -a & -3 & 6 \end{pmatrix},\ a \in \mathbf{R}$$

が定める一次変換とする．次の問に答えよ．

(1) A の階数を求めよ．

(2) $\ker \phi_a$ を求めよ．

(3) λ を実数とする．ベクトル

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

で張られた $\mathbf{R}^3$ の部分空間を L_λ とおく．$\phi_a(\mathbf{R}^3) \cap L_\lambda$ を求めよ．

問題 2.

(1) p を素数とするとき，整数環 $\mathbf{Z}$ のイデアル $p\mathbf{Z}$ による剰余環を $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ とする．$\mathbf{F}_p$ が体であることを示せ．

(2) $p = 3, 5$ のとき，剰余環 $\mathbf{F}_p[x]/(x^2+1)\mathbf{F}_p[x]$ は体であるかどうか理由をつけて述べよ．

(3) $\mathbf{F}_p$ 係数の 2×2 正則行列のなす群

$$GL_2(\mathbf{F}_p) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbf{F}_p, ad - bc \neq 0 \right\}$$

の位数を求めよ．

(4) $A \in GL_2(\mathbf{F}_p)$ で，基本ベクトル $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を動かさない行列の全体を

$$H := \{A \in GL_2(\mathbf{F}_p) | A\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1\}$$

とする．H が $GL_2(\mathbf{F}_p)$ の部分群であることを示し，H の位数を求めよ．

問題 3.

(1) 2 個の元からなる集合 $X = \{a, b\}$ 上の位相は全部で 4 つある．それらをすべて挙げよ．

(2) $f(a) = b$ かつ $f(b) = a$ で定まる $X = \{a, b\}$ 上の写像 $f : X \to X$ を考える．f が連続となるような X 上の位相をすべて挙げよ．

(3) n 個の元からなる集合 $Y = \{a_1, \ldots, a_n\}$ と，その部分集合 $A_k = \{a_1, \ldots, a_k\}$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ を考える．$\{\emptyset, Y, A_1, \ldots, A_{n-1}\}$ は Y に位相を与える (証明不要)．この位相に関して，全単射な連続写像 $g : Y \to Y$ は恒等写像に限ることを示せ．

問題 4. $I = [a, b]$ は空でない有界閉区間とする．次の問に答えよ．

(1) f は I 上連続関数とする．$x \in I$ の関数

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

は I 上一様連続であることを示せ．

(2) I 上連続関数の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が，$n \to \infty$ のとき I 上連続関数 f に，I 上一様収束すれば，

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

が成り立つことを示せ．

(3) 各 f_n は I 上 C^1 級とする．関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $n \to \infty$ のとき I 上の関数 f に I 上各点収束し，導関数の関数列 $\left\{\dfrac{df_n}{dx}\right\}_{n=1}^{\infty}$ が $n \to \infty$ のとき I 上連続関数 g に I 上一様収束すれば，

$$f \text{ は } I \text{ 上 } C^1 \text{ 級で } \frac{df}{dx} = g$$

が成り立つことを示せ．ここで，I の端点における微分は，片側微分係数（右微分係数または左微分係数）によって定める．

問題 5. 次の問に答えよ．

(1) 次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D x^{\frac{1}{3}}\,dxdy, \quad \text{ただし}, D : x, y \geq 0,\, x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq 1$$

(2) 3 変数の実数値関数

$$f(x, y, z) = 1 - x - 2y - z + xy + yz + zx + x^2 + y^2 + z^2$$

の $\mathbf{R}^3$ における極値を求めよ．

平成 21 年度博士課程前期課程入学試験問題：数学 II

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
平成 20 年 8 月 27 日
時間：13:00–14:30

問題は問題 A から問題 K の 11 問ある．以下の問題から任意の 2 問を選んで解答せよ．解答用紙は 1 問につき 1 枚とし，解答した問題の記号を明示すること．

問題 A． 2 変数多項式環 $\mathbf{C}[a,b]$ に対して，次の二つの変数の変換によって得られる多項式環の自己同型 τ, σ を考える．

$$\tau(a) = b,\ \tau(b) = a$$
$$\sigma(a) = b,\ \sigma(b) = -a - b$$

G を τ, σ で生成される多項式環の自己同型群の部分群とする．次の問に答えよ．

(1) 群 G は 3 次対称群 S_3 と同型であることを示せ．

(2) $p = ab + a^2 + b^2, q = -ab(a+b)$ は，G で不変な多項式であることを示せ．

(3) H を τ で生成された G の部分群とする．H の $\mathbf{C}[a,b]$ への作用で不変な元の全体のなす環を生成する多項式 s_1, s_2 を一組挙げよ．

(4) $f : \mathbf{C}^2 \longrightarrow \mathbf{C}^2$ を $(a,b) \mapsto (p,q) = (ab + a^2 + b^2, -ab(a+b))$ で与えられる多項式写像とする．前問で得た多項式 s_1, s_2 によって $g : \mathbf{C}^2 \longrightarrow \mathbf{C}^2$, $g : (a,b) \mapsto (s_1, s_2)$ を考える．このとき多項式写像 $h : \mathbf{C}^2 \longrightarrow \mathbf{C}^2$ で，$f = h \circ g$ となるものを具体的に与えよ．

(5) P, Q, X を変数とする多項式環 $\mathbf{C}[P,Q,X]$ において，多項式

$$X^3 - PX - Q$$

は既約元であることを示せ．

(6) a, b, X を変数とする多項式環 $\mathbf{C}[a,b,X]$ において，多項式

$$X^3 - (ab + a^2 + b^2)X + ab(a+b)$$

は既約か？

問題 B． p, q を相異なる素数とする．

(1) $\mathbf{Q}(\sqrt[p]{q})$ を含む $\mathbf{Q}$ の最小の正規拡大 K を求めよ．

(2) $K/\mathbf{Q}$ のガロア群を決定せよ．

問題 C． 平面 $\mathbf{R}^2$ 内の単位円周 $S^1 = \left\{(\cos t, \sin t) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; t \in \mathbf{R}\right\}$ を考える．自然数 $n \in \mathbf{N}$ に対し，$p_n(\cos t, \sin t) = (\cos nt, \sin nt)$ で定義される写像 $p_n : S^1 \to S^1$ について，以下の問に答えよ．

(1) p_n は well-defined であることを示せ．

(2) p_n で導かれる基本群の間の準同型 $p_{n*} : \pi_1(S^1) \to \pi_1(S^1)$ はどのような写像か，答えよ．

(3) p_{n*} の像を $\mathrm{Im}\ p_{n*}$ で表すとき，商群 $\pi_1(S^1)/\mathrm{Im}\ p_{n*}$ はどのような群か，答えよ．

問題 D. 実数全体の集合 $\mathbf{R}$ に対して，次の条件を満たす $\mathbf{R}$ の部分集合 A を考える: $A = \emptyset$，または，ある実数 r が存在して $(-\infty, -r) \cup (r, \infty) \subset A$ が成り立つ．言い換えれば，補集合 $\mathbf{R} \setminus A$ が $\mathbf{R}$ と一致するか，または，有界集合となる．

(1) 上の条件を満たす部分集合の全体は，$\mathbf{R}$ 上の位相を与えることを示せ．

(2) (1) の位相に関して，$\mathbf{R}$ はハウスドルフ空間か調べよ．

(3) (1) の位相に関して，$\mathbf{R}$ は連結か調べよ．

(4) (1) の位相に関して，$\mathbf{R}$ はコンパクトか調べよ．

問題 E. C^∞ 級関数 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ のグラフ $\{(x, f(x)) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in \mathbf{R}\}$ を，x をパラメータとする $\mathbf{R}^2$ 上の曲線とみなす．この曲線の $(0, f(0))$ における曲率を $\kappa(0)$ とする．また，三点 $(0, f(0))$, $(x, f(x))$, $(-x, f(-x))$ を通る円周または直線を $C(x)$ とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) f が偶関数 (すなわち $f(-x) = f(x)$) のとき，$\kappa(0)$ を求めよ．

(2) f を偶関数とする．$\lim_{x \to 0} C(x)$ は，$\kappa(0) \neq 0$ のとき半径 $1/\kappa(0)$ の円周であり，$\kappa(0) = 0$ のとき直線であることを示せ．

(3) f を奇関数 (すなわち $f(-x) = -f(x)$) とする．$\kappa(0)$ および $\lim_{x \to 0} C(x)$ について調べよ．

問題 F. 複素数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ が

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 < \infty$$

を満たしているとする．この $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ に対して，閉区間 $[0, \pi]$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ を

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx$$

で定義する．このとき，次の問に答えよ．

(1) $l < m$ なる自然数 l，m に対して，

$$\sup_{x \in [0, \pi]} |f_l(x) - f_m(x)| \leq \sum_{k=l+1}^{m} |a_k|$$

が成立することを示せ．

(2) $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ は

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$$

を満たすことを示せ．

(3) $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ は $[0, \pi]$ 上のある連続関数に一様収束することを示せ．

問題 G.　関数 $f(z)$ は，閉正方形 $K := \{\, z = x + iy \,|\, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \,\}$ の近傍で定義された有理形関数で，K の境界上には極も零点もなく，条件

$$f(x+i) = f(x)\,, \quad f(1+iy) = f(iy)\,, \qquad (\,0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$$

を満たすとする．

(1) $f(z)$ が K の内部にただ一つの極を持つなら，その位数は 2 以上であることを証明せよ．

(2) $f(z)$ が K の内部にただ一つの零点を持つなら，その位数は 2 以上であることを証明せよ．

問題 H.　以下では $T > 0$ とし，$u(t)$ は開区間 $(0, T)$ 上で定義された実数値 C^2 級関数であり，$(0, T)$ において

$$\frac{d^2u}{dt^2} + t\frac{du}{dt} - (u^2 + t) = 0$$

を満たしているとする．

(1) $u(t)$ は開区間 $(0, T)$ 内に極大点を持たないことを示せ．

(2) $u(t)$ の開区間 $(0, T)$ 内における零点の個数は高々 2 個であることを示せ．

問題 I.

(1) 関数 $f(t)$ を $f(t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} \frac{1}{1+(t/x)^2} \frac{1}{x}\, dx$ と定めるとき $\int_0^\infty f(t)\, dt = 1$ が成り立つことを示せ．

(2) 関係式 $\frac{1}{1+x^2}\frac{1}{1+(t/x)^2}\frac{1}{x} = \frac{1}{t^2-1}\left(\frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{t^2+x^2}\right)$ を用いて $f(t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{\log t}{t^2-1}$ を導け．

(3) 次を示せ．

$$\int_0^\infty \frac{\log t}{t^2-1}\, dt = 2\int_0^1 \frac{\log t}{t^2-1}\, dt = 2\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2}$$

(4) 以上の計算より

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

を導き，

$$\sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

を示せ．

問題 J. $X_1, X_2, \ldots$ は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上に定義された独立確率変数列とし，各 X_n は標準正規分布に従う，すなわち任意の非負可測関数 f に対し

$$E[f(X_n)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

を満たすとする．

$$V_n = (X_1)^2 + (X_2)^2 + \cdots + (X_n)^2, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

とおく．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 任意の非負可測関数 f に対し

$$E[f(V_2)] = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} f(v) \exp\left(-\frac{v}{2}\right) dv$$

が成り立つことを示せ．

(2) 任意の非負可測関数 f に対し

$$E[f(V_{2m})] = \frac{1}{2^m (m-1)!} \int_0^{\infty} f(v) v^{m-1} \exp\left(-\frac{v}{2}\right) dv, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

が成り立つことを示せ．

(3) 前問 (2) の結果を用いることによって，$k = 1, 2, \ldots$ に対し

$$E[(V_{2m})^{-k}] = \frac{1}{2^k (m-1)(m-2)\cdots(m-k)}, \qquad m = k+1, k+2, \ldots$$

が成り立つことを示せ．

(4) 任意の正数 ε に対し

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{|X_1|}{\sqrt{V_n}} > \varepsilon\right) = 0$$

が成り立つことを示せ．

問題 K.

(1) `int` 型の整数を係数とする一変数多項式を表す構造体を C 言語により定義し，その仕様を説明せよ．

(2) (1) で定義した構造体へのポインタを入出力とする，次の関数を C 言語で書け．ただし，整数演算の overflow は考慮しなくてよい．出力多項式は，新たにメモリを確保して作ること．

  (a) 二つの多項式の積を返す関数．

  (b) 多項式を，monic な多項式で割った余りを返す関数．