平成 22 年度博士課程前期課程入学試験問題：数学 I

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
平成 21 年 8 月 26 日
時間：9:30–12:00

問題 1 から問題 4 の 4 問 に解答せよ．解答用紙は 1 問につき 1 枚とし，解答した問題番号を明示すること．

問題 1.

(1) 実数体 $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間 V がある．V の部分集合 W が部分空間であることの定義を述べよ．

(2) A を $m \times n$ 行列とするとき，$W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$ は $\mathbf{R}^n$ の部分空間であることを示せ．

(3) a を実数とし，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a^2 \\ 1 & a & a \\ a & 1 & a \end{pmatrix}$$

とおく．$W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3 \mid A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$ が $\mathbf{0}$ 以外の元を含むような a の値をすべて求め，それぞれのときの W の次元を求めよ．

問題 2. p を素数とする．$\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ を p 個の元からなる有限体とし，$\mathbf{F}_p^\times$ でその乗法群を表す．$n \in \mathbf{Z}$ の $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ における剰余類を，混同の恐れがなければ同じ n で表すことにする．$\mathbf{F}_p$ の元を成分にもつ 2×2 行列全体 $M_2(\mathbf{F}_p)$ の部分集合を

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \ a \in \mathbf{F}_p^\times, b \in \mathbf{F}_p \right\}, \qquad N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \ b \in \mathbf{F}_p \right\},$$

で定める．

(1) G は行列の乗法を演算として群をなすことを示し，その位数を求めよ．

(2) N は G の正規部分群であることを示し，G/N がどのような群か答えよ．

(3) $p = 5$ のときを考える．$b \in \mathbf{F}_5$ とする．以下の元 $X, Y, Z \in G$ の位数をそれぞれ求めよ．

$$X = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 2 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

問題 3. $\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への連続写像 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ であって, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ と以下の条件をみたすものをそれぞれ 2 つずつ構成しなさい. それぞれの条件をみたすことを示し, 写像として異なることを示しなさい.

(1) f は全射であるが単射ではない.

(2) f は単射であるが全射ではない.

(3) f の像はコンパクト (compact) である.

問題 4. f を閉区間 $[0,1]$ において連続な関数とする．各 $x \in [0,1]$ に対して，$f_0(x) = f(x)$, $f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)\,dt$ $(n \geq 1)$ とおくことにより，$[0,1]$ で定義された関数列 $\{f_n\}$ を定め，さらに，各 $x \in [0,1]$ に対して，$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ $(n \geq 1)$ とおくことにより，$[0,1]$ で定義された関数列 $\{g_n\}$ を定めることにする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $[0,1]$ において $f_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt$ $(n \geq 1)$ となることを示せ．

(2) $[0,1]$ において $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n!} \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$ $(n \geq 1)$ となることを示せ．

(3) 関数列 $\{g_n\}$ は $[0,1]$ において一様収束することを示せ．

(4) $[0,1]$ において $\frac{d}{dx} g_{n+1}(x) = g_n(x) + f(x)$ $(n \geq 1)$ が成立することを示せ．さらに，関数列 $\{g_n\}$ の極限を g と表すとき，$[0,1]$ において $\frac{d}{dx} g(x) = g(x) + f(x)$ が成立することを示せ．

(5) $[0,1]$ において $g(x) = \int_0^x e^{x-t} f(t)\,dt$ となることを示せ．

平成 22 年度博士課程前期課程入学試験問題：数学 II

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
平成 21 年 8 月 26 日
時間：13:00–14:30

問題は問題 A から問題 K の 11 問ある．これらの問題から任意の 2 問を選んで解答せよ．解答用紙は 1 問につき 1 枚とし，解答した問題の記号を明示すること．

問題 A． $\mathbf{Q}$ を有理数体，$F = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3})$ とし，拡大 $F/\mathbf{Q}$ について考える．

(1) $[\mathbf{Q}(\sqrt{2}) : \mathbf{Q}]$ と $[\mathbf{Q}(\sqrt[3]{3}) : \mathbf{Q}]$ を求めよ．

(2) $[F : \mathbf{Q}]$ を求めよ．

(3) F の $\mathbf{Q}$ 上の Galois 閉包を L とする．$L/\mathbf{Q}$ の拡大次数を求めよ．

問題 B． 3 変数 (t, x, y) の多項式

$$F(t, x, y) = y^2 - 4x^3 - t^2x - t^2$$

について, 次の問に答えよ.

(1) $\mathbf{C}^3$ の代数曲面 $X = \{(t, x, y) \in \mathbf{C}^3 \mid F(t, x, y) = 0\}$ の特異点の座標を求めよ.

(2) $t \in \mathbf{C}$ を固定したときの 2 変数多項式 $f_t(x, y)$ を $f_t(x, y) = F(t, x, y)$ と定める．$\mathbf{C}^2$ の代数曲線 $X_t = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 \mid f_t(x, y) = 0\}$ が特異点をもつ t を定め, その時の特異点の座標を求めよ．

問題 C．

(1) I を $\mathbf{R}$ の開区間とする. $\alpha : I \to \mathbf{R}^3$ を弧長パラメータ s $(\in I)$ をもつ C^∞ 級曲線とするとき, 以下の問に答えよ．

(a) 従法線ベクトルの s 微分が, 接線ベクトルおよび従法線ベクトルと直交することを示せ.

(b) α のフレネ・セレの方程式を書け.

(2) $c^2 = a^2 + b^2$, $a, b, c > 0$ とし, θ を $\mathbf{R}$ 上のなめらかな関数とするとき, 曲線

$$\alpha(s) = \left(\frac{a}{c} \int_0^s \sin\theta(u)du,\ \frac{a}{c} \int_0^s \cos\theta(u)du,\ \frac{b}{c}s \right)$$

について, 以下の二つのことを証明せよ:

(a) s は弧長パラメータである.

(b) $\alpha(s)$ の接線と平面 $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x_3 = 0\}$ のなす角度は s によらず一定である.

問題 D.

(1) パラメータ u, v をもつ $\mathbf{R}^3$ 内の曲面 $X(u, v)$ のガウス曲率と平均曲率の定義を述べよ.

(2) 曲面 $X(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, \sinh u)$, $(u \in \mathbf{R}, 0 \leq v < 2\pi)$ のガウス曲率と平均曲率を計算せよ.

問題 E. 実数を成分とする 2 次正方行列のうち, 行列式が正のもの全体を X とする.

$$X = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \ \det A = ad - bc > 0 \right\}.$$

2 次正方行列は成分を 4 個もつので, X を 4 次元ユークリッド空間の部分空間とみなす. $I = [0, 1]$ として, 連続写像 $H : X \times I \to X$ を次で定義する. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in X$ と $t \in I$ に対して,

$$H(A, t) = \begin{pmatrix} (1-t)a + \dfrac{ta}{\sqrt{a^2+b^2}} & (1-t)b + \dfrac{tb}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ (1-t)c - \dfrac{tb}{\sqrt{a^2+b^2}} & (1-t)d + \dfrac{ta}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}.$$

(1) $\Delta = \det A$ とおくとき, 次の等式を示せ.

$$\det H(A, t) = \left\{ (1-t)\sqrt{a^2+b^2} + t \right\} \left\{ (1-t)\frac{\Delta}{\sqrt{a^2+b^2}} + t \right\}.$$

(2) $H(A, t) \in X$ を示せ.

(3) $t = 1$ のときの制限写像 $H(*, 1) : X \times \{1\} \to X$ の像を求めよ.

(4) (3) の像を Y とする. 任意の $A \in Y$ と $t \in I$ に対して $H(A, t) = A$ を示せ.

(5) X の基本群を求めよ.

問題 F. G を $\mathbf{R}$ 上のルベーグ可積分かつ有界な連続関数とする. f を $\mathbf{R}$ 上のルベーグ可積分関数とし, 関数 $G * f$ を

$$(G * f)(x) = \int_{\mathbf{R}} G(x-y) f(y) dy$$

によって定義するとき, 次の問に答えなさい.

(1) $G * f$ は有界な関数であることを示せ.

(2) $G * f$ は $\mathbf{R}$ 上のルベーグ可積分な関数であることを示せ.

(3) $G * f$ は連続関数であることを示せ.

問題 G. 複素関数 $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ $(z \in \mathbf{C}\backslash\{0\})$ について, 次の問に答えよ.

(1) 原点を中心とする単位円周を反時計まわりにまわる曲線を Γ とするとき,

$$\int_{\Gamma} f(z)dz$$

を求めよ.

(2) 点 $z = 0$ は, 関数 $f(z)$ の極ではない特異点であることを説明せよ.

(3) 関数 $f(z)$ は, 点 $z = 0$ の近傍で, 0 以外のすべての複素数値を無限回とることを証明せよ.

問題 H. N を自然数, $p(x)$ を N 次の多項式とし

$$H_n(x) = e^{-p(x)} \frac{d^n}{dx^n} e^{p(x)}, \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

と定める. この時, 以下の問に答えよ.

(1) 次が成立することを示せ.

$$H_{n+1}(x) = p'(x)H_n(x) + H_n'(x), \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

ここに $'$ は x に関する微分を表わす.

(2) $e^{p(x+t)-p(x)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x)$ を示せ.

(3) $h_n(x) = e^{p(x)} H_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ は次の微分方程式を満たすことを示せ.

$$\frac{d^N h_n}{dx^N} - \sum_{l=0}^{N-1} \frac{(N+n-1)!}{(n+l)!\,(N-l-1)!} p^{(N-l)}(x) \frac{d^l h_n}{dx^l} = 0, \qquad (p^{(N-l)} = \frac{d^{N-l} p}{dx^{N-l}}).$$

問題 I. α, β, c, k は複素パラメータで $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $c \neq 0, 1$ とする. 微分方程式

$$(*) \qquad y''(x) + \left[\frac{1-\alpha}{x} + \frac{1-\beta}{x-1} - \frac{1}{x-c} \right] y'(x) + \frac{\alpha\beta(x-k)}{x(x-1)(x-c)} y(x) = 0$$

について次の問に答えよ.

(1) $y = x^{\alpha}$ または $y = (x-1)^{\beta}$ が $(*)$ の解になるためのパラメータの関係式を求めよ.

(2) (1) の各条件の下で, $(*)$ の一般解の $x = c$ での正則性を調べよ.

問題 J.　$X_1, X_2, \ldots$ は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上に定義された独立かつ同分布な確率変数列とし，任意の非負可測関数 f に対し

$$E[f(X_1)] = \int_0^\infty f(x)e^{-x}dx$$

を満たすとする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $t > 0$ に対し，期待値 $E[e^{-tX_1}]$ を求めよ．

(2) $a > 0$ に対し，確率 $P(X_1 > a)$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n > 2\log n) < \infty$ を示せ．

(4) 無限和 $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n^2}$ が確率 1 で有限であることを示せ．

(5) $t > 0$ に対し，$E[e^{-tS}] = \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + n^{-2}t}$ が成り立つことを示せ．

問題 K.　二つの正の整数 (10 進数表記) を読み込み, その和を表示するプログラムを C 言語で書きなさい. なお最低でも 100 桁までの正の整数の入力に対応すること. またメモリの利用効率が悪くてもよいので, 簡潔で理解しやすいプログラムを書くこと.
このプログラムの入出力例:

```
99999999999099999    Enter
88888888888888888    Enter
188888888887988887
```