平成23年度博士課程前期課程入学試験問題：数学 I

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
平成22年8月30日
時間：9:30–12:00

問題1から問題5の5問に解答せよ．解答用紙は1問につき1枚とし，解答した問題番号を明示すること．

問題 1. x を実数とするとき, 行列 A と B を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

と定める. 次の問に答えよ.

(1) A の行列式を求めよ.

(2) A の階数を求めよ.

(3) $AB = BA$ を示せ.

(4) B の固有値と固有ベクトルを求め, $P^{-1}BP$ が対角行列となる行列 P および P^{-1} を求めよ.

(5) A を対角化せよ.

問題 2.

(1) 可換環 R に対し, 積に関する可逆元全体がなす部分集合を $R^\times$ とおく. $R^\times$ は群になることを示せ.

(2) $(\mathbf{Z}/7\mathbf{Z})^\times$, $(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})^\times$ が巡回群かどうかを調べよ.

(3) p を素数とし, p 個の元をもつ有限体を $\mathbf{F}_p$ とおく. $p = 3, 5$ の場合に, $(\mathbf{F}_p[x]/(x^2+1))^\times$ が巡回群かどうかを調べよ.

問題 3.

(1) ハウスドルフ空間の定義を述べよ.

(2) 位相空間 X, Y の間の単射な連続写像 $f : X \to Y$ がある. Y がハウスドルフ空間であれば, X もハウスドルフ空間であることを示せ.

(3) コンパクト空間からハウスドルフ空間への全単射連続写像は同相写像であることを示せ.

問題 4.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{(1+n)^2}$ を求めよ.

(2) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ に対して $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$ を求めよ.

問題 5. 以下の問に答えよ.

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するとき,

$$|a_n| \to 0 \quad (n\to\infty)$$

が成立することを示せ.

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するとき, $0<r<1$ となる任意の r について冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

は $|x|\le r$ で一様収束することを示せ.

平成 23 年度博士課程前期課程入学試験問題：数学 II

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
平成 22 年 8 月 30 日
時間：13:00–14:30

問題は問題 A から問題 K の 11 問ある．これらの問題から任意の 2 問を選んで解答せよ．解答用紙は 1 問につき 1 枚とし，解答した問題の記号を明示すること．

問題 A. a を複素パラメータとするとき

$$F_a(x,y) = x^3 + y^3 + 1 - 3axy$$

なる多項式を考える．$F_a(x,y) = 0$ で定義される $\mathbf{C}^2$ のアファイン代数曲線を

$$X_a = \{(x,y) \in \mathbf{C}^2 \mid F_a(x,y) = 0\}$$

とおく．次の問に答えよ．

(1) a を固定し，$F = F(x,y) = F_a(x,y)$ とおく．$G(x,y), H(x,y) \in \mathbf{C}[x,y]$ が存在して $F = G(x,y)H(x,y)$ と分解したとすると，2 つの代数曲線 $G(x,y) = 0$, $H(x,y) = 0$ の交点で X_a は特異点を持つことを示せ．

(2) $F(x,y) = G(x,y)H(x,y)$, $\deg_x G(x,y) = 1$, $\deg_x H(x,y) = 2$ （$\deg_x$ は x についての多項式の次数）と分解するとき，2 つの代数曲線 $G(x,y) = 0$, $H(x,y) = 0$ は必ず交点を持つことを示せ．

(3) X_a が可約なアファイン代数曲線となる a をすべて求めよ．

問題 B. $\alpha = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ とする．以下の問に答えよ．ただし $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$ は用いてよい．

(1) $\mathbf{Q}\left(\sqrt{2}\right) \subset \mathbf{Q}(\alpha)$ を示せ．

(2) $\alpha \notin \mathbf{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ を示せ．

(3) 拡大次数 $[\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}]$ を求めよ．

(4) α が満たす $\mathbf{Q}$ 上の 4 次方程式を求めよ．また α の $\mathbf{Q}$ 上の共役をすべて求めよ．

(5) $\mathbf{Q}(\alpha)$ は $\mathbf{Q}$ の Galois 拡大であることを示せ．

(6) $\mathbf{Q}(\alpha)/\mathbf{Q}$ の Galois 群を決定せよ．

問題 C. 次の問に答えよ．

(1) 2 次元ユークリッド空間の部分空間

$$X = \{(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2 | x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1)(x_1^2 + x_2^2 - 4) = 0\}$$

の基本群を計算せよ．

(2) 3 次元ユークリッド空間の部分空間

$$X = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3 | x_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4) = 0\}$$

の基本群を計算せよ．

問題 D.　次の問に答えよ．

(1) ユークリッド空間 $\mathbf{R}^N$ $(N \geq 4)$ 内の七つの点 f, f_1, f_2, f_3, f_{12}, f_{13}, f_{23} が以下を満たしているとする．

(a) どの三点も一直線上にはのっていない．

(b) 四点 f, f_1, f_2, f_3 は同一の二次元平面上にはのっていない．

(c) 各 $(i,j) = (1,2),(1,3),(2,3)$ に対して，四点 f, f_i, f_j, f_{ij} は同一の二次元平面 P_{ij} にのっている．

(d) f_{12}, f_{13}, f_{23} をそれぞれ f_{21}, f_{31}, f_{32} とも書くことにし，f_i, f_{ij}, f_{ik} $(\{i,j,k\} = \{1,2,3\})$ を含む二次元平面を $\hat{P}_i$ と呼ぶことにする．三つの平面 $\hat{P}_i$ $(i = 1,2,3)$ が上の条件下で最も一般の位置にあるとする．

このとき，三平面 $\hat{P}_1$, $\hat{P}_2$, $\hat{P}_3$ が一点 f_{123} のみで交わることを示せ．(図 A 参照)

(2) $\mathbf{R}^N$ 内の 11 個の点 f, f_i $(1 \leq i \leq 4)$, f_{ij} $(1 \leq i < j \leq 4)$ に対して，この内の 7 個の点 f, f_i, f_j, f_k, f_{ij}, f_{ik}, f_{jk} $(1 \leq i < j < k \leq 4)$ は (1) の条件を満たし，(1) にあるように唯一の点 f_{ijk} を定めるとする．さらに，次の条件を満たしているとする．

(a) f_1, f_{12}, f_{13}, f_{14}, f_{123}, f_{124}, f_{134} は，(1) にあるように唯一の点 $f_{1234}^{(1)}$ を定める．

(b) f_2, f_{12}, f_{23}, f_{24}, f_{123}, f_{124}, f_{234} は，(1) にあるように唯一の点 $f_{1234}^{(2)}$ を定める．

(c) f_3, f_{13}, f_{23}, f_{34}, f_{123}, f_{134}, f_{234} は，(1) にあるように唯一の点 $f_{1234}^{(3)}$ を定める．

(d) f_4, f_{14}, f_{24}, f_{34}, f_{124}, f_{134}, f_{234} は，(1) にあるように唯一の点 $f_{1234}^{(4)}$ を定める．

4 点 f_1, f_{12}, f_{13}, f_{14} を含む 3 次元アフィン部分空間，4 点 f_2, f_{12}, f_{23}, f_{24} を含む 3 次元アフィン部分空間，4 点 f_3, f_{13}, f_{23}, f_{34} を含む 3 次元アフィン部分空間，4 点 f_4, f_{14}, f_{24}, f_{34} を含む 3 次元アフィン部分空間，の 4 つは上の条件下で最も一般の位置にあるとする．このとき，$f_{1234}^{(1)} = f_{1234}^{(2)} = f_{1234}^{(3)} = f_{1234}^{(4)}$ となることを示せ．(図 B では f_{1234} と書いている．)

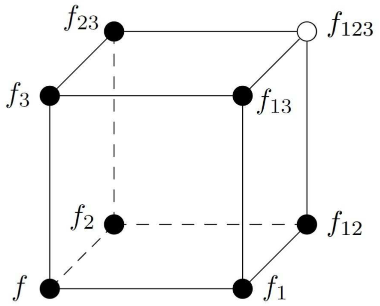

図 A

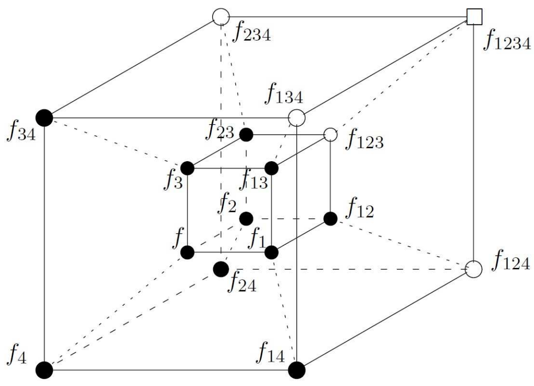

図 B

問題 E.

(1) $\mathbf{R}^2$ 内の曲線 $\alpha(s) = (\cosh s, \sinh s)$, $s \geq 0$ と実数 $s_0 > 0$ を考える．曲線 $\alpha(s)$, $(0,0)$ と $(1,0)$ を通る直線, $(0,0)$ と $\alpha(s_0)$ を通る直線によって囲まれる有界な領域の面積を求めよ．

(2) $\mathbf{R}^3_1 = \{(x,y,t) \,|\, x,y,t \in \mathbf{R}\}$ をローレンツ計量 $\langle (x_1,y_1,t_1),(x_2,y_2,t_2)\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 - t_1t_2$ が入ったベクトル空間とし，$H = \{(x,y,t) \in \mathbf{R}^3_1 \,|\, x^2+y^2-t^2 = -1, t > 0\}$ とする．$\alpha(s)$ を $\alpha(0) = (0,0,1)$, $\alpha'(0) = (0,1,0)$ を満たす H 内の測地線とする．この測地線の座標表示を $\alpha(s) = (x(s), y(s), t(s))$ としたとき，$x(s)$ が恒等的に 0 であること，および,

$$(y(s))^2 - (t(s))^2 = -1\,, \quad (y'(s))^2 - (t'(s))^2 = 1$$

が成り立つことを示せ．

(3) (2) の最後の二つの等式を用いることで,

$$y'(s) = t(s)\,, \quad t'(s) = y(s)$$

が任意の $s \in \mathbf{R}$ に対して成り立つことを示せ．

(4) $y(s)$ と $t(s)$ を求めよ．

問題 F. X を無限次元 Hilbert 空間とする．X における内積を $(\ ,\ )$ で表し，その内積から導かれるノルムを $\|\ \ \|$ で表すことにする．いま，$\{\phi_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は X の正規直交系で，$\{\lambda_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$ を満たす複素数列とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \phi_n$ は X において収束することを示せ．

(2) 任意の $v \in X$ に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\phi_n, v)$ は絶対収束することを示せ．

問題 G. 次の各問に答えよ．

(1) 複素関数 $\cos z$ は，単位閉円板 $\overline{D} = \{z \in \mathbf{C}\,;\, |z| \leq 1\}$ において零点をもたないことを示せ．

(2) 複素関数

$$f(z) = \frac{\tan z}{z^3(z - \frac{\pi}{4})}$$

について，次の問に答えよ．

(a) 関数 $f(z)$ の，単位閉円板 $\overline{D} = \{z \in \mathbf{C}\,;\, |z| \leq 1\}$ 内のすべての極とその位数を求めよ．

(b) それらの極の留数を求めよ．

(c) 単位円周 $\{z \in \mathbf{C}\,;\, |z| = 1\}$ を正の向きに回る曲線を C とするとき，

$$\int_C f(z)\, dz$$

の値を求めよ．

問題 H.　$V(x)$ を x の $2N$ 次 monic 多項式 $(N \geq 1)$ とし，多項式 f, g に対して内積 $(\ ,\ )$ が

$$(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-V(x)}dx$$

で定まっているとする．x の n 次多項式 $p_n(x)$ を，

$$p_n(x) = \frac{\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-1} & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-2} & \mu_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^{n-1} & x^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-1} \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-2} \end{vmatrix}} \qquad \text{ただし} \quad \mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{-V(x)}dx$$

および $p_0(x) = 1$ で定義するとき，以下の問に答えよ．

(1) 自然数 k, n について，$k < n$ のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k p_n(x)e^{-V(x)}dx = 0$$

が成り立つことを示せ．

(2) $n \neq m$ に対して $(p_n, p_m) = 0$ が成り立つことを示せ．

(3) $V(x) = x^4 + ax^2$ (a は定数) とし，$h_n = (p_n, p_n)$ とおく．このとき，

$$xp_n(x) = p_{n+1}(x) + \frac{h_n}{h_{n-1}}p_{n-1}(x)$$

が成り立つことを示せ．

問題 I.　a を正定数とし，f を (x,t) の関数とする．

(1) 微分方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad (t \geq 0,\ x \in \mathbf{R})$$

の初期条件

$$f(x,0) = \cosh ax$$

に対する解をひとつ求めよ．

(2) f が微分方程式

$$(*) \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = f^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

を満たすとする．座標変換 $(x,t) \mapsto (y,s)$ が

$$y = \int_0^x \frac{1}{f(u,t)}du, \quad s = t$$

によって定義できるとする．この変換によって，方程式 $(*)$ はどのような式に変換されるか答えよ．

問題 J. Borel-Cantelli の第二補題は確率空間上の独立な事象列 $\{A_n\}$ が条件

(イ)
$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$$

を満たすときに $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n} = \infty$ a.s. であることを主張する．ここで $\mathbf{1}_A$ は A 上で 1, A^c 上で 0 の値をとる確率変数である．事象列が独立でないときにも条件 (イ) と以下の条件 (ロ) が成り立つなら同じ結論が導けることが知られている．

(ロ)
$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} P(A_n \cap A_m)}{\left(\sum_{n=1}^{N} P(A_n)\right)^2} = 1.$$

事象列 $\{A_n\}$ は必ずしも独立でないとし，条件 (イ) と条件 (ロ) を仮定して以下の問に答えることで，上記の結論を導け．

(1) $S_N = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{A_n}$ とおくとき $\lim_{N\to\infty} E[\,S_N\,]$ と $\lim_{N\to\infty} \frac{(E[\,S_N\,])^2}{E[\,S_N^2\,]}$ とを求めよ．

(2) 任意に $0 < \varepsilon < 1$ をとり，

$$B_N = \{S_n \geq \varepsilon E[\,S_n\,] \text{ となる } n \geq N \text{ が存在する}\,\}$$

とおく．$E[\,\mathbf{1}_{B_N^c} S_N\,] \leq \varepsilon E[\,S_N\,]$ を示し，$E[\,\mathbf{1}_{B_N} S_N\,] \geq (1-\varepsilon) E[\,S_N\,]$ を導け．

(3) $E[\,\mathbf{1}_{B_N} S_N\,] \leq \sqrt{P(B_N)}\sqrt{E[\,S_N^2\,]}$ を示せ．

(4) $P(B_N) \geq (1-\varepsilon)^2 \frac{(E[\,S_N\,])^2}{E[\,S_N^2\,]}$ を示せ．

(5) $P\left(\lim_{N\to\infty} S_N = \infty\right) \geq \lim_{N\to\infty} P(B_N)$ を示せ．

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n} = \infty$ a.s. を示せ．

問題 K.　C 言語で書かれた次のプログラムについて, 以下の問に答えよ.

```
#define MAX(x,y) ((x)>(y)?(x):(y))
#define MIN(x,y) ((x)>(y)?(y):(x))

unsigned int gcd(unsigned int a,unsigned int b)
{
    unsigned int i,j,u,v,t;

    for ( i = 0; a%2 == 0; i++ ) a /= 2;
    for ( j = 0; b%2 == 0; j++ ) b /= 2;
    u = MAX(a,b);
    v = MIN(a,b);
    while ( u > v ) {
/**/    t = u-v;
        while ( t%2 == 0 ) t /= 2;
        u = MAX(t,v);
        v = MIN(t,v);
    }
    i = MIN(i,j);
    while ( i-- ) v *= 2;
    return v;
}
```

(1) $a = 40902$, $b = 24140$ に対してこのプログラムを実行したときの`/**/` における u, v の値の変化を表にせよ.

(2) a, b が正整数のとき, このプログラムが有限ステップで停止して a, b の最大公約数を出力することを示せ.