平成 24 年度博士課程前期課程入学試験問題：数学 I

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
平成 23 年 8 月 29 日
時間：9:30–12:00

問題 1 から問題 4 の 4 問 に解答せよ．解答用紙は 1 問につき 1 枚とし，解答した問題番号を明示すること．

問題 1． 実数 a に対し，行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & a \\ -a & 1 & -a \\ a & -a & 1 \end{pmatrix}$$

と定める．次の問に答えよ．

(1) A の行列式を求めよ．

(2) 各実数 a について，A の階数を求めよ．

(3) 各実数 a について，$\mathbf{R}^3$ の線形部分空間 $\operatorname{Ker} A = \{\, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0} \,\}$ の次元を求め, 次元が正のときは $\operatorname{Ker} A$ の基底を具体的に与えよ．

(4) A の固有値を求めよ．

(5) A を用いて $\mathbf{R}^3$ 上の双一次形式 $(\ ,\ )_A$ を

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})_A = {}^t\mathbf{x}A\mathbf{y} \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3)$$

と定める．すべての $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ に対し $(\mathbf{x}, \mathbf{x})_A = {}^t\mathbf{x}A\mathbf{x} > 0$ となるような a の値の範囲を求めよ．

問題 2． 次の問に答えよ.

(1) $V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ とする．3 重積分 $I = \displaystyle\iiint_V (x^2 + y^2)dxdydz$ を求めよ.

(2) $a, b > 0$ とする．2 変数関数 $f(x, y) = xy(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} - 1)$ の極値を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - f(x)}{x^6} = 0$ を満たす 6 次以下の多項式 $f(x)$ を求めよ.

問題 3.　G を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で生成される一般線形群 $\mathrm{GL}(2, \mathbf{R})$ の部分群とするとき，次の問に答えよ．

(1) AB, BA を求めよ．

(2) 次の集合に属するベクトルをすべて，平面上に図示せよ．

$$\left\{ P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; P \in G \right\}$$

(3) G の位数を求めよ．

(4) G から 4 次対称群 S_4 への単射準同型をひとつ構成せよ．

(5) 4 次対称群 S_4 の部分群で G と同型になるものがいくつあるか答えよ．

問題 4.　次の問に答えよ.

(1) 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ について, X の部分集合 C がコンパクトであることの定義を述べよ.

(2) ハウスドルフ空間 $(X, \mathcal{O})$ のコンパクトな部分集合 C_1, C_2 について, $C_1 \cap C_2$ もコンパクト集合であることを示せ.

(3) ハウスドルフ空間 $(X, \mathcal{O})$ の空でないコンパクトな部分集合 $C_1, C_2, C_3, \ldots$ について, $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \ldots$ を満たせば, $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$ が空でないコンパクト集合であることを示せ.

平成 24 年度博士課程前期課程入学試験問題：数学 II

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
平成 23 年 8 月 29 日
時間：13:00–14:30

問題は問題 A から問題 K の 11 問ある．これらの問題から任意の 2 問を選んで解答せよ．解答用紙は 1 問につき 1 枚とし，解答した問題の記号を明示すること．

問題 A.

(1) a, b, c, d は複素数で $ad - bc \neq 0$ を満たすものとする．このとき有理関数

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

が定める複素アファイン直線 $\mathbf{C}$ からそれ自身への有理写像は，複素射影直線 $\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ からそれ自身への正則同型写像に一意的に拡張できることを示せ．

(2) $\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ からそれ自身への正則同型写像で $0, 1, -1 \in \mathbf{C}$ をそれぞれ $1, -1, 0$ に移すものを求めよ．

問題 B. $p > 2$ を素数とし $\mathbf{F}_p$ を p 個の元からなる有限体, $\mathbf{F}_p^\times = \mathbf{F}_p \backslash \{0\}$ とする.

$$\mathrm{GL}(2, \mathbf{F}_p) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \ a, b, c, d \in \mathbf{F}_p, \ ad - bc \neq 0 \right\}$$

は行列の積により群をなす. この部分集合 G, H を

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \ a \in \mathbf{F}_p^\times, b \in \mathbf{F}_p \right\}, \quad H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \ b \in \mathbf{F}_p \right\}$$

で定める.

(1) G, H は $\mathrm{GL}(2, \mathbf{F}_p)$ の部分群で, H は G の正規部分群であることを示せ.

今 K は可換体, F は K のガロア拡大でそのガロア群 $\mathrm{Gal}(F/K)$ が G と同型であるとする. この同型で $\mathrm{Gal}(F/K)$ と G を同一視し, G の部分群 H に対応する拡大 F/K の中間体を M とする.

(2) F/K の中間体 L で, L/K がガロア拡大でないものが存在することを示せ.

(3) F/M の中間体は自明なものしかないことを示せ.

(4) M/K の中間体の個数は $p-1$ の約数の個数と等しいことを示せ.

問題 C. 以下の問に答えよ.

(1) 2 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^2$ の部分空間

$$X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x^2 + y^2 - 1)xy = 0\}$$

の基本群を求めよ.

(2) 3 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ の部分空間

$$Y = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x^2 + y^2 + z^2 - 1)(x^2 + y^2)(y^2 + z^2)(z^2 + x^2) = 0\}$$

の基本群を求めよ.

問題 D. アーベル群と準同型写像の列

$$0 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

を考える．ただし, C_2 は a を生成元とする階数 1 の自由アーベル群, C_1 は b および c を生成元とする階数 2 の自由アーベル群, C_0 は d を生成元とする階数 1 の自由アーベル群とする．また ∂_3, ∂_1, ∂_0 は零写像とする．

このとき, 準同型写像 ∂_2 が以下の各場合について, $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$ $(0 \leq i \leq 2)$ が成り立つことを示し, 商群 $H_i = \mathrm{Ker}\partial_i / \mathrm{Im}\partial_{i+1}$ $(0 \leq i \leq 2)$ を求めよ．

(1) $\partial_2(a) = 0$

(2) $\partial_2(a) = 2b$

(3) $\partial_2(a) = pb + qc$ (p, q は整数の定数)

問題 E. 5 次元 Minkowski 空間

$$R^{4,1} = \{X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \,|\, x_j \in \mathbf{R}\}$$

を考える．ただし Minkowski 内積は

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5),\ Y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \in R^{4,1}$$

に対して

$$\langle X, Y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 - x_5y_5$$

で与えられる．$L^4 = \{X \in R^{4,1} \,|\, \langle X, X \rangle = 0\}$ を 4 次元 light cone とし,

$$M = \{X \in L^4 \,|\, \langle X, (0,0,0,1,1) \rangle = -1\}$$

とおく．

(1) 写像 $\xi : \mathbf{R}^3 \to R^{4,1}$ を, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ に対し

$$\xi(\boldsymbol{x}) = \left(x_1, x_2, x_3, \frac{1}{2}(|\boldsymbol{x}|^2 - 1), \frac{1}{2}(|\boldsymbol{x}|^2 + 1) \right)$$

で定める．ただし, $|\boldsymbol{x}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ とする．M の任意の点 X は適当な $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3$ を用いて

$$X = \xi(\boldsymbol{x})$$

と表せることを示せ．

(2) M が 3 次元多様体であることを簡単に説明せよ．

(3) 曲線 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbf{R}^3$ に対して, 以下の問に答えよ．

(a) $\left. \dfrac{d}{dt}\xi(\boldsymbol{a}(t)) \right|_{t=0}$ を計算せよ．

(b) $\boldsymbol{a}(0) = \boldsymbol{b}(0)$ のとき,

$$\left\langle \left. \frac{d}{dt}\xi(\boldsymbol{a}(t)) \right|_{t=0}, \left. \frac{d}{dt}\xi(\boldsymbol{b}(t)) \right|_{t=0} \right\rangle = \sum_{i,j=1,2,3} g_{ij} a_i'(0) b_j'(0)$$

と表せる．g_{ij} を求めよ．

(4) Minkowski 計量を M 上に制限して得られる計量の定値断面曲率が 0 であることを簡単に説明せよ．

問題 F. 関数 $\hat{u} : [0,\infty) \times \mathbf{R}^2 \ni (t,\xi) \longmapsto \hat{u}(t,\xi) \in \mathbf{C}$ は C^1 級とし，$[0,\infty) \times \mathbf{R}^2$ 上で次の偏微分方程式を満たすとする：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t,\xi) + (M\xi, \nabla_\xi)\hat{u}(t,\xi) + |\xi|^2 \hat{u}(t,\xi) = 0, \\ \hfill \hat{u}(0,\xi) = \hat{f}(\xi). \end{cases}$$

ただし，$M = (m_{ij})_{1 \le i,j \le 2}$ は与えられた実 2 次正方定数行列とし，

$$(M\xi, \nabla_\xi)\hat{u}(t,\xi) = \sum_{1 \le i,j \le 2} m_{ij}\xi_j \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi_i}(t,\xi)$$

とする．また，$\hat{f}$ は $\mathbf{R}^2$ 上の関数で，無限回微分可能かつ台がコンパクトであるとする．

(1) 常微分方程式 $\dot{X}(t) = MX(t)$, $X(0) = \xi$ の解を $e^{tM}\xi$ で表し, $\hat{v}(t,\xi) = \hat{u}(t, e^{tM}\xi)$ とおく．このとき，$\hat{v}$ の満たす方程式を書け．なお，解答において $e^{tM}\xi$ という表示は用いてよい．

(2) (1) で求めた方程式は各 ξ を固定するごとに t についての常微分方程式と見なせる．この常微分方程式を解くことで，$\hat{u}$ を $\hat{f}$ を用いて表せ．なお，(1) で定義した常微分方程式の解に対して $e^{tM}\xi$ という表示を用いてよい．

(3) M が対角行列, つまり $m_{11} = \lambda_1$, $m_{22} = \lambda_2$, $m_{12} = m_{21} = 0$ とする．また，$[0,\infty) \times \mathbf{R}^2$ 上の関数 u 及び $\mathbf{R}^2$ 上の関数 f をそれぞれ $\hat{u}$ と $\hat{f}$ の ξ に関する逆フーリエ変換

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2} \hat{u}(t,\xi)e^{ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}\xi, \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2} \hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

により定義する．

(a) 反転公式 $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbf{R}^2} f(y)e^{-iy\cdot\xi}\,\mathrm{d}y = \hat{f}(\xi)$ 及び (2) を用いることにより，u は $u(t,x) = \displaystyle\int_{\mathbf{R}^2} G(t,x,y)f(y)\,\mathrm{d}y$ という形に書くことができることを示せ．

(b) (a) の関数 $G(t,x,y)$ を具体的に求めよ．

問題 G.

(1) 複素変数の三角関数 $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$ について, ある正定数 $K > 0$ があって,

$$\frac{1}{|\sin \pi z|} \le Ke^{-\pi|\mathrm{Im}\, z|} \qquad (|\mathrm{Im}\, z| \ge 1)$$

が成立することを示せ.

(2) $f(z)$ を $\mathbf{C}$ 上の正則関数とし, $0 \le k < \pi$ を満たす実数 k と, 正定数 $L > 0$ について,

$$|f(z)| \le L\, e^{k|\mathrm{Im}\, z|} \qquad (|\mathrm{Im}\, z| \ge 1)$$

が成立すると仮定する. 各 $a \in \mathbf{C}$ に対して, $z = a - \frac{1}{2}$ を通る垂直方向の直線

$$\gamma_a : \quad \gamma_a(t) = a - \tfrac{1}{2} + it \qquad (t \in \mathbf{R})$$

を経路として, 積分

$$F(a) = \frac{1}{2i}\int_{\gamma_a} \frac{f(z)\,dz}{\sin \pi(z-a)}$$

を考える. このとき $F(a+1) + F(a) = -f(a)$ が成立することを示せ.

問題 H. $\mathbf{R}$ 上の Lebesgue 可測関数 f について以下の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} \frac{(nx)^2}{1+(nx)^2}|f(x)|\,dx$ が n について有界ならば f は $\mathbf{R}$ 上可積分であることを示せ．

(2) このとき以下の等式を示せ．

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}} \frac{(nx)^2}{1+(nx)^2} f(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}} f(x)\,dx.$$

問題 I. $\{(P_n(x), E_n)\}_{n=0}^{\infty}$ を 0 でない n 次多項式 $P_n(x)$ と実数 E_n の組の列とし，ある多項式 $a(x)$ と $b(x)$ が存在して，0 以上の任意の整数 n について P_n は

$$(\star) \qquad a(x)\frac{d^2u}{dx^2} + b(x)\frac{du}{dx} + E_n u = 0$$

の解であるとする．

(1) $a(x)$ は高々 2 次の多項式，$b(x)$ は高々 1 次の多項式であることを示せ．

(2) 0 以上の任意の整数 n について次を示せ．

$$E_n = -n\Big[(n-1)\alpha + \beta\Big].$$

ここで α は $a(x)$ の x^2 の係数，β は $b(x)$ の x の係数である．

(3) $a(x) = x,\, b(x) = -x+1$ のとき，条件を満たす $\{(P_n(x), E_n)\}_{n=0}^{\infty}$ が存在することを示せ．

(4) (3) のときに微分方程式 $(\star)$ の解で $P_n(x)$ と独立になるものを各 n について求めよ．

問題 J. 実確率変数 X について以下の問に答えよ．

(1) $X \geq 0$ が a.s. で成り立つとき， $EX = 0$ ならば $P(X = 0) = 1$ であることを示せ．

(2) X が 2 乗可積分のとき，$E(X^2) = (EX)^2$ ならば X は確率 1 で定数であることを示せ．

(3) X が 2 乗可積分のとき，次の式が成り立つことを示せ．ただし， $V(X) = E\big[(X - EX)^2\big]$ とする．

$$\min_{a\in\mathbf{R}} E\big[(X-a)^2\big] = V(X)$$

問題 K.

(1) 与えられた文字列を逆順にして戻す C 言語の関数 `reverse(char s[])` を再帰を用いて書きなさい．テスト用の main 関数も書くこと．

(2) a, b を 0 でない整数とするとき $ax + by = d$ の整数解 (x, y) をひとつ求めるプログラムを再帰を用いて（なるべく短く）書きなさい．なお d は a, b の最大公約数である．プログラム言語として何を用いたか明示すること．扱える整数の範囲は C 言語の int 型の範囲で十分である．