平成 25 年度博士課程前期課程入学試験問題：数学 I

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
平成 24 年 8 月 29 日
時間：9:30–12:00

問題 1 から問題 4 の 4 問 に解答せよ．解答用紙は 1 問につき 1 枚とし，解答した問題番号を明示すること．

問題 1.
θ を $0 \le \theta \le \pi$ を満たす実数, d_1, d_2, d_3 を正の実数とする．3 次元空間 $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$ において, 次の 3 つの平面 H_1, H_2, H_3 と原点を中心とした半径 1 の球 S^2 を考える.

$$H_1: \ x + y + z = d_1 \qquad H_2: \ (\cos\theta)x + (\sin\theta)y = d_2$$
$$H_3: \ (\cos\theta)y + (\sin\theta)z = d_3$$
$$S^2: \ x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

以下の問いに答えよ.

(1) 平面 H_1, H_2, H_3 と垂直なベクトル (法線ベクトル) をそれぞれひとつずつ求めよ.

(2) 3 つの平面 H_1, H_2, H_3 と球 S^2 が接するように d_1, d_2, d_3 を定めよ．またその時の接点をそれぞれ A_1, A_2, A_3 とするとき, A_1, A_2, A_3 の座標を θ を用いて表せ.

(3) 原点を $O = (0, 0, 0)$ とし, A_1, A_2, A_3 の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}_1 = \overrightarrow{OA_1}$, $\boldsymbol{a}_2 = \overrightarrow{OA_2}$, $\boldsymbol{a}_3 = \overrightarrow{OA_3}$ とするとき, この 3 つのベクトルは θ によらずに常に一次独立であることを示せ.

(4) 四面体 $OA_1A_2A_3$ の体積を $V(\theta)$ とするとき, $V(\theta)$ を求め, $V(\theta)$ の最大値, 最小値およびそれを与える θ を求めよ.

問題 2. 以下の問いに答えよ.

(1) p を素数とする. 位数 p の群は巡回群であることを示せ.

(2) 位数 6 のアーベル群は巡回群であることを示せ.

(3) 位数 4 の群はアーベル群であることを示せ.

(4) 位数 15 の群は位数 3 の部分群と位数 5 の部分群をそれぞれひとつずつ含むことを示せ. また位数 15 の群は巡回群であることを示せ.

問題 3. 以下の問いに答えよ．

(1) (a) δ を正の実数とする． $0 \neq x \in \mathbb{R}^2$ に対して， $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ を $\delta N \leq |x| < \delta(N+1)$ となるように取る．ただし， $|x|$ は $\mathbb{R}^2$ のユークリッドノルムを表す．このとき， $\mathbb{R}^2$ の点列 $\{y_0, y_1, \ldots, y_{N+1}\}$ を

$$y_k = \begin{cases} \delta k \dfrac{x}{|x|} & k = 0, \ldots, N \\ x & k = N+1 \end{cases}$$

と定めれば，任意の $k \in \{0, \ldots, N\}$ に対して $|y_{k+1} - y_k| \leq \delta$ となることを示せ.

(b) $\mathbb{R}^2$ 上の実数値関数 f が一様連続であることの定義を述べよ.

(c) f を $\mathbb{R}^2$ 上の実数値一様連続関数とする．このとき，ある正の定数 C が存在して，すべての $x \in \mathbb{R}^2$ に対し，$|f(x)| \leq C(1 + |x|)$ となることを示せ.

(2) 積分 $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3+1}\, dx \right) dy$ の値を求めよ.

問題 4. $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ をハウスドルフ空間とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 位相空間 $(Y, \mathcal{O}_Y)$ がハウスドルフ空間であることの定義を述べよ.

(2) ふたつの連続写像 $f, g : X \to Y$ に対して,

$$S_2 = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$$

とおく. このとき S_2 は X の開集合であることを示せ.

(3) $n (\geq 3)$ 個の連続写像 $f_i : X \to Y$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ に対して,

$$S_n = \{x \in X \mid f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x) \text{ はすべて相異なる }\}$$

とおく. このとき S_n は X の開集合であることを示せ.

(4) 可算無限個の連続写像 $f_i : X \to Y$ $(i = 1, 2, \ldots)$ に対して,

$$S_\infty = \{x \in X \mid f_1(x), f_2(x), \ldots \text{ はすべて相異なる }\}$$

とおく. このとき S_∞ が X の開集合とならない例を挙げよ.

平成 25 年度博士課程前期課程入学試験問題：数学 II

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
平成 24 年 8 月 29 日
時間：13:00–14:30

問題は問題 A から問題 K の 11 問ある．これらの問題から任意の 2 問を選んで解答せよ．解答用紙は 1 問につき 1 枚とし，解答した問題の記号を明示すること．

問題 A. $\mathbb{Q}$ を有理数体とする．以下の $\mathbb{Q}$ の拡大体 F について拡大次数を求め，$\mathbb{Q}$ の Galois 拡大かどうか判定せよ．Galois 拡大の場合は Galois 群を決定し中間体をすべて定めよ．また，Galois 拡大でない場合は Galois 閉包とその $\mathbb{Q}$ 上の拡大次数を求めよ．

(1) $F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

(2) $F = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$.

(3) $F = \mathbb{Q}(\zeta_5)$, ただし $\zeta_5 = \cos\dfrac{2\pi}{5} + \sqrt{-1}\sin\dfrac{2\pi}{5}$.

問題 B. 以下の問いに答えよ．

(1) 複素平面 $\mathbb{C}$ 上の有理関数 $f(z) = \dfrac{z^3}{z+1}$ は複素射影直線 $\mathbf{P}^1_{\mathbb{C}}$ 上の有理型関数に一意的に拡張できることを示せ．また, 拡張された有理型関数の零点と極をもとめ, それぞれの位数を求めよ．

(2) 複素平面 $\mathbb{C}$ 上の有理微分形式 $\dfrac{z^2}{z^2-1}dz$ は複素射影直線 $\mathbf{P}^1_{\mathbb{C}}$ 上の有理型微分形式に一意的に拡張できることを示せ．また, 拡張された有理型微分形式の零点と極をもとめ, それぞれの位数を求めよ．

問題 C. E を $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ における実 2 変数 C^∞ 関数芽全体とする．

$$M = \{f \in E \,|\, f(0,0) = 0\}$$

とする．E 上の和と積を関数の和と積で定義する．また, $f(x,y) \in E$ に対して $\partial f/\partial x$ と $\partial f/\partial y$ で E 上生成されるイデアルを $J(f)$ と書く．以下の問いに答えよ．

(1) M は E のただひとつの極大イデアルであることを示せ．

(2) 自然数 k に対して実ベクトル空間 E/M^k の次元を求めよ．ただし, M^k はイデアル M の k 個の積である．

(3) $M^\infty = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty} M^k$ とする．M^∞ の元の例を 2 つ挙げよ．

(4) $f(x,y) = x^3 + xy^2$ のとき, 実ベクトル空間 $M/J(f)$ の次元を求めよ．

(5) $g(x,y) = xy(x-y)(x-2y)$ のとき, 実ベクトル空間 $M/J(g)$ の次元を求めよ．

問題 D.　$(u,v) \in \mathbb{R}^2$ でパラメータ表示されている, 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の実解析的な曲面 $p(u,v)$ のガウス曲率および平均曲率を, それぞれ K および H とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 正の定数 c に対して, 原点を中心として $p(u,v)$ を c 倍に拡大 (または縮小) して得られる曲面 $c \cdot p(u,v)$ のガウス曲率および平均曲率は, それぞれ K/c^2 および H/c となることを示せ.

(2) H が恒等的に 0 ならば, $K \leq 0$ であることを示せ.

(3) K と H がともに恒等的に 0 ならば, 第二基本形式も恒等的に 0 となることを示せ. また, このような曲面は平面の一部になることを示せ.

問題 E.　2 以上の整数 n に対して, 内部を含めた正 $2n$ 角形 $A_1A_2\ldots A_{2n}$ を考える. その辺同士を, ひとつ飛ばしで同一視してできる商空間を X_n とする. すなわち, n 本の辺

$$\overrightarrow{A_1A_2},\ \overrightarrow{A_3A_4},\ \ldots,\ \overrightarrow{A_{2n-1}A_{2n}}$$

を向きを込めて一本に重なるように同一視し, また n 本の辺

$$\overrightarrow{A_2A_3},\ \overrightarrow{A_4A_5},\ \ldots,\ \overrightarrow{A_{2n}A_1}$$

を向きを込めて一本に重なるように同一視する. 以下の問いに答えよ.

(1) X_2 の基本群およびホモロジー群を求めよ.

(2) X_n $(n \geq 3)$ の基本群およびホモロジー群を求めよ.

問題 F. $\mathbb{R}$ 上の連続関数列 $\{f_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は，ある正の定数 M に対して

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |f_n(t)| \le Mn^{-3} \quad (n\in\mathbb{N})$$

を満たしているとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin nx$ は (t,x) について $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上で絶対かつ一様に収束し，その級数で表される関数 $F(t,x)$ は $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上の連続関数であることを示せ．

(2) $n\in\mathbb{N}$ に対して，$A_n(t)$ は微分方程式の初期値問題

$$A_n''(t)+n^2A_n(t)=f_n(t), \quad A_n(0)=0, \quad A_n'(0)=0$$

の解を表すものとする．このとき，$A_n(t)$ は

$$A_n(t)=\frac{1}{n}\int_0^t f_n(s)\sin[n(t-s)]\,ds$$

のように表されることを示せ．

(3) $T>0$，$n\in\mathbb{N}$ とする．このとき，$t\in[-T,T]$ に対して

$$|A_n(t)|\le MTn^{-4}, \quad |A_n'(t)|\le MTn^{-3}, \quad |A_n''(t)|\le MTn^{-2}+Mn^{-3}$$

が成立することを示せ．

(4) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n(t)\sin nx$ で表される関数 $u(t,x)$ は $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上で C^2 級であり，

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)(t,x)-\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(t,x)=F(t,x), \\ u(0,x)=0, \quad \left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)(0,x)=0 \end{cases}$$

を満たすことを示せ．

問題 G.　$z_k,\, c_k$ $(1 \le k \le n)$ を複素数とし，

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{z - z_k}$$

とおく．以下の問いに答えよ．

(1) $a \neq \operatorname{Im} z_k$ $(1 \le k \le n)$ なる実数 a に対し，$z = ia$ を通り実軸に平行な直線

$$L_a : \quad L_a(t) = t + ia \qquad (t \in \mathbb{R})$$

を経路とする積分

$$\int_{L_a} |f(z)|\, dz$$

は，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k = 0$ のとき収束することを示せ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k = 0$ のとき，

$$\lim_{a \to +\infty} \left(\int_{L_{-a}} f(z)\, dz - \int_{L_a} f(z)\, dz \right) \tag{♯}$$

を求めよ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k \neq 0$ のとき，(♯) の値はどのようになるか説明せよ．

問題 H.　以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{e^x - 1}$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\frac{\sin x}{e^x - 1}$ は $(0, \infty)$ で有界であることを示せ．

(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{e^x - 1} dx < \infty$ を示せ．

(4) $\displaystyle\frac{\sin x}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \sin x \ \ \big(x \in (0, \infty)\big)$ を示せ．

(5) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ であることを示せ．

問題 I.　複素平面 $\mathbb{C}$ における微分方程式

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - z^2 - \frac{3}{4z^2}\right) u = 0 \tag{☆}$$

について以下の問いに答えよ．

(1) 関数 u_+ と u_- を

$$u_+(z) = z^{-1/2} e^{z^2/2}, \qquad u_-(z) = z^{-1/2} e^{-z^2/2}$$

と定めるとき，(u_+, u_-) は $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ において (☆) の解の基本系を与えることを示せ．

(2) 方程式 (☆) の原点における特性指数をすべて求め，各特性指数に対応する (☆) の解を

(a) 解が原点を中心とする巾級数に展開できることを仮定し，

(b) 巾級数展開の係数が満たす漸化式を求め，

(c) (b) で求めた漸化式を解く

ことにより求めよ．

(3) (2) で求めた解を (u_+, u_-) の一次結合で表せ．

問題 J.　X をパラメータ $\alpha > 0$ の指数分布に従う確率変数とする．つまり，任意の $t \geq 0$ に対して

$$P(X \geq t) = e^{-\alpha t}$$

が成り立っているものとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) X の平均，分散，密度関数を求めよ．

(2) Y をパラメータ $\beta > 0$ の指数分布に従う，X と独立な確率変数とする．このとき，次の確率を求めよ．

(a) $P(Y \geq X)$.

(b) $\alpha \neq \beta$ のときの $P(X + Y \geq t)$．ただし，$t \geq 0$ とする．

(c) $\alpha = \beta$ のときの $P(X + Y \geq t)$．ただし，$t \geq 0$ とする．

(3) $\{X_n\}_{n \geq 1}$ を独立同分布確率変数列で X と同じ分布をもつものとする．任意の自然数 $n \geq 1$ と正の数 t に対して

$$P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \geq t)$$

を計算せよ．

問題 K.　以下の問いに答えよ．

(1) 2 変数の単項式全体 $M_2 = \{x^a y^b \,|\, a, b \text{ は非負整数 } \}$ の空でない部分集合 S において，$u \in S$ が S の極小元とは u を割り切る S の元が u のみであることと定義する．このとき，任意の空でない $S \subset M_2$ に対し，S の極小元は存在して有限個であることを示せ．

(2) n 変数の単項式全体 $M_n = \{x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \,|\, a_1, \ldots, a_n \text{は非負整数} \}$ における全次数逆辞書式順序

$$
\begin{aligned}
x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \succ x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n} \Leftrightarrow\ & a_1 + \cdots + a_n > b_1 + \cdots + b_n \\
& \text{または} (\ a_1 + \cdots + a_n = b_1 + \cdots + b_n \\
& \qquad\quad \text{かつベクトル} (a_1 - b_1, \ldots, a_n - b_n) \\
& \qquad\quad \text{の最も右の 0 でない成分が負} \ )
\end{aligned}
$$

による $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$，$x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$ の比較を行う関数を C 言語により記述せよ．指数 a_i, b_i は C の 32bit 整数を用いてよいものとする．