平成 26 年度博士課程前期課程入学試験問題：数学 I

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
平成 25 年 8 月 22 日
時間：9:30–12:00

問題 1 から問題 4 の 4 問 に解答せよ．解答用紙は 1 問につき 1 枚とし，解答した問題番号を明示すること．

問題 1. 以下の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{R}^2$ のベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

は 1 次独立か？ 理由とともに答えよ．

(2) $\boldsymbol{R}^3$ のベクトル

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

が 1 次従属となるとき，z を x, y で表せ．

(3) 実 n 次正方行列 A が相異なる n 個の実固有値 $\lambda_1, ..., \lambda_n$ をもつとし，$\boldsymbol{u}_1, ..., \boldsymbol{u}_n$ を対応する固有ベクトルとする（つまり $A\boldsymbol{u}_i = \lambda_i \boldsymbol{u}_i$, $\boldsymbol{u}_i \neq \boldsymbol{0}$）．このとき，$\boldsymbol{u}_1, ..., \boldsymbol{u}_n$ は 1 次独立であることを示せ．

(4) A を実 n 次正方行列とする．$\boldsymbol{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ が $A^{n-1}\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ かつ $A^n \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を満たしている．

(a) $\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}, \ldots, A^{n-1}\boldsymbol{x}$ が 1 次独立であることを示せ．

(b) $A^n = O$ を示せ．

問題 2. 以下の問に答えよ．

(1) (a) 実数全体 $\boldsymbol{R}$ を加法により群とみなし，正の実数全体 $\boldsymbol{R}_+$ を乗法により群とみなしたとき，$\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{R}_+$ は群として同型であることを示せ．

(b) 有理数全体 $\boldsymbol{Q}$ を加法により群とみなし，正の有理数全体 $\boldsymbol{Q}_+$ を乗法により群とみなしたとき，$\boldsymbol{Q}$ と $\boldsymbol{Q}_+$ は群として同型でないことを示せ．

(2) (a) G, G' を群とし，$f\colon G \to G'$ を群の準同型写像とする．$\ker(f)$ の定義を述べ，それが G の正規部分群であることを示せ．

(b) G, G_1, G_2 を群とし，$f_1\colon G \to G_1$, $f_2\colon G \to G_2$ を群の準同型写像とする．写像 $f\colon G \to G_1 \times G_2$ を $f(g) = (f_1(g), f_2(g))$ によって定めると，f は群の準同型写像であることを示せ．

(c) G を群，N_1, N_2 を G の正規部分群とする．G/N_1, G/N_2 が共にアーベル群なら，$G/(N_1 \cap N_2)$ もアーベル群であることを示せ．

問題 3. 以下の問に答えよ.

(1) (a) $x \geq 0$ の時, 不等式 $0 \leq x - \log(1+x) \leq \dfrac{1}{2}x^2$ が成立することを示せ.

(b) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$ が収束することを示せ.

(2) $\boldsymbol{R}^2$ 上の実数値関数 $f(x,y) = (x^2 - 8y)e^{x-y^2}$ の極値とその極値をとる (x,y) を全て求めよ.

(3) $\boldsymbol{R}^3$ 内の二つの曲面 $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ と $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ で囲まれた領域の体積を求めよ.

(4) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある $\alpha \in \boldsymbol{R}$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = \alpha$ を満たすとする. この時 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \alpha$ であることを示せ.

問題 4. X を 0 以上の整数全体の集合とする. X に次の位相 $\mathcal{O}$ を与えて位相空間とする ($\mathcal{O}$ が位相になることは証明しなくてよい).

$$\mathcal{O} = \{A \subset X \mid 0 \notin A\} \cup \{B \subset X \mid 0 \in B,\ \text{かつ}\ X \setminus B\ \text{は空集合または有限集合}\}$$

このとき以下の問に答えよ.

(1) X の部分集合 $A = \{0,1,2,3\}$ の内部 A^i, 外部 A^e, 境界 A^f を求めよ.

(2) X はハウスドルフ空間であることを示せ.

(3) X はコンパクト空間であることを示せ.

(4) ユークリッド位相の入った $\boldsymbol{R}$ の部分空間

$$Y = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n = 1, 2, \ldots \right\}$$

を考える. X と Y は同相であることを示せ.

平成 26 年度博士課程前期課程入学試験問題：数学 II

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
平成 25 年 8 月 22 日
時間：13:00–14:30

問題は問題 A から問題 K の 11 問ある．これらの問題から任意の 2 問を選んで解答せよ．解答用紙は 1 問につき 1 枚とし，解答した問題の記号を明示すること．

問題 A. x, y, z を不定元とする．また $a, b \in \boldsymbol{C}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{C}[x,y]/(xy-1)$ の商体が $\boldsymbol{C}[z]$ の商体に $\boldsymbol{C}$ 上同型であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{C}[x,y]/(xy-1)$ は $\boldsymbol{C}[z]$ と $\boldsymbol{C}$ 上同型でないことを示せ．

(3) $\boldsymbol{C}[x,y]$ のイデアル $(x-a, y-b)$ は極大イデアルであることを示せ．

(4) $\boldsymbol{C}[x,y]$ の イデアル $(x-a, y-b)$ が $(xy-1)$ を含むための (a,b) に関する条件を求めよ．

問題 B. $L = \boldsymbol{Q}(\sqrt[4]{2}) \subset \boldsymbol{C}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $X^4 - 2 \in \boldsymbol{Q}[X]$ が $\boldsymbol{Q}$ 上既約であることを示せ．

(2) 拡大次数 $[L : \boldsymbol{Q}]$ を求めよ．

(3) $\boldsymbol{C}$ 内における，$\sqrt[4]{2}$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の共役をすべて求めよ．

(4) $L/\boldsymbol{Q}$ は Galois 拡大でないことを示せ．

(5) L の $\boldsymbol{Q}$ 上の自己同型写像全体のなす群 G の構造を決定せよ．

(6) L の $\boldsymbol{Q}$ 上の Galois 閉包 F と拡大次数 $[F : \boldsymbol{Q}]$ を求めよ．

問題 C. 以下の問に答えよ．

(1) $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ を座標近傍系とする 2 次元 C^∞ 級微分可能多様体 $\big(M, \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}\big)$ 上の連続関数 $f : M \to \boldsymbol{R}$ が C^∞ 級微分可能であることの定義を述べよ．

(2)
$$S^2 = \{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$
とする．S^2 が 2 次元 C^∞ 級微分可能多様体であることを示せ．

(3) $g : S^2 \to \boldsymbol{R}^3$ を $(x,y,z) \in S^2$ に対して
$$g(x,y,z) = (xy, yz, zx)$$
で定める．$\operatorname{rank} dg_p < 2$ となる $p \in S^2$ をすべて求めよ．ただし，dg は g が接空間の間に誘導する写像とする．

(4) 任意の C^∞ 級微分可能写像 $h : S^2 \to \boldsymbol{R}^2$ に対して $\operatorname{rank} dh_p < 2$ となる $p \in S^2$ が存在することを示せ．

問題 D. xyz 空間内の図形

$$\{(0,y,0)\,|\,0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x,y,0)\,|\,x^2+(y-2)^2=1\}$$

を, x 軸のまわりに一回転してできる立体を P とする. 以下の問に答えよ.

(1) P の基本群を求めよ.

(2) P のホモロジー群を求めよ.

問題 E. $\boldsymbol{R}^2$ 内の放物線 $y=x^2$ のパラメーター表示 $\gamma(x)=(x,x^2)$ を考える. $\gamma(x)$ の単位法線ベクトルを

$$N(x)=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}(-2x,1)$$

とする. 以下の問に答えよ.

(1) $\gamma(x)$ の曲率 $\kappa(x)$ を求めよ.

(2) $a>0$ に対して γ の平行曲面 $\gamma^a(x)$ を $\gamma^a(x)=\gamma(x)+aN(x)$ とし, γ の縮閉線 $\hat{\gamma}(x)$ を

$$\hat{\gamma}(x)=\frac{1}{\kappa(x)}N(x)$$

と定める. $\gamma^a(x)$ と $\hat{\gamma}(x)$ の曲率をそれぞれ $\kappa^a(x)$, $\hat{\kappa}(x)$ とするとき, $\kappa^a(x)$ と $\hat{\kappa}(x)$ を求めよ.

(3) $\gamma^a:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2$ がはめ込みになるための a の条件を求めよ.

(4) $N^a(x)$ を $\gamma^a(x)$ の単位法線ベクトルとするとき, $N^a(x)=N(x)$ ととれることを説明せよ. また, $\Gamma^a(x):\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^4$ を $\Gamma^a(x)=\big(\gamma^a(x),N^a(x)\big)$ と定めると, Γ^a はつねにはめ込みになることを示せ.

(5) $x\neq 0$ における任意の $\hat{\gamma}(x)$ の接線は放物線 γ と直交することを示せ.

問題 F. $\phi(x), \psi(x) \in \mathscr{S}(\boldsymbol{R})$ とし, $\hat{\phi}(\xi), \hat{\psi}(\xi)$ をそれぞれ $\phi(x), \psi(x)$ のフーリエ変換とする．ここで, $\mathscr{S}(\boldsymbol{R})$ は $\boldsymbol{R}$ 上の急減少関数全体のなす空間である．また, $\boldsymbol{R}$ 上の可積分関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $\hat{f}(\xi)$ は

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\boldsymbol{R}} e^{-ix\xi} f(x)\, dx$$

で与えられるものとする．以下の問に答えよ．

(1) $\xi \in \boldsymbol{R}$ に対して, $T(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\xi^2 & 0 \end{pmatrix}$, $v(\xi) = \begin{pmatrix} \hat{\phi}(\xi) \\ \hat{\psi}(\xi) \end{pmatrix}$ とおく．更に, $t \in \boldsymbol{R}, \xi \in \boldsymbol{R}$ に対して,

$$v_0(t,\xi) = v(\xi), \quad v_n(t,\xi) = v(\xi) + \int_0^t T(\xi) v_{n-1}(s,\xi)\, ds \quad (n \geq 1)$$

とおくことにより, ベクトル値関数列 $\{v_n(t,\xi)\}$ を定めることにする．このとき, $\lim_{n\to\infty} v_n(t,\xi)$ を求めよ．

(2) (1) で求めた $\lim_{n\to\infty} v_n(t,\xi)$ を $\begin{pmatrix} w_1(t,\xi) \\ w_2(t,\xi) \end{pmatrix}$ と表すことにする．このとき, $(\partial_t w_1)(t,\xi) - w_2(t,\xi)$ 及び $(\partial_t w_2)(t,\xi) + \xi^2 w_1(t,\xi)$ を計算せよ．

(3) $u(t,x)$ を

$$u(t,x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\boldsymbol{R}} e^{ix\xi} w_1(t,\xi)\, d\xi$$

で定めることにする．このとき, 関数 $u(t,x)$ は

$$\begin{cases} (\partial_t^2 u)(t,x) - (\partial_x^2 u)(t,x) = 0, \\ u(0,x) = \phi(x), \quad (\partial_t u)(0,x) = \psi(x) \end{cases}$$

を満たすことを示せ．

問題 G. a, b を 0 でない複素数とし, 積分

$$B_1(z;a) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C(\varepsilon)} \frac{e^{z\zeta}}{e^{a\zeta} - 1} \frac{d\zeta}{\zeta},$$
$$B_2(z;a,b) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C(\varepsilon)} \frac{e^{z\zeta}}{(e^{a\zeta} - 1)(e^{b\zeta} - 1)} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

を考える．ここで ε は $0 < \varepsilon < \min\{|2\pi/a|, |2\pi/b|\}$ を満たす正の実数とし, $C(\varepsilon)$ は原点を正方向に一周する半径 ε の円周を表すものとする．以下の問に答えよ．

(1) $B_1(z;a)$, $B_2(z;a,b)$ を計算せよ．

(2) 次の等式が成立することを示せ: $B_2(z+b;a,b) - B_2(z;a,b) = B_1(z;a)$.

(3) 次の等式が成立することを示せ: $B_2(a+b-z;a,b) = B_2(z;a,b)$.

問題 H.　$a < b$ とし, f, g は閉区間 $[a,b]$ 上定義された Lebesgue 可測関数で $[a,b]$ 上可積分であるとする. 以下の問に答えよ.

(1) $[a,b]$ 上の関数 F, G を

$$F(x) = \int_a^x f(y)\,dy, \qquad G(x) = \int_a^x g(y)\,dy$$

と定める. F, G は $[a,b]$ 上有界で連続であることを示せ.

(2) $f(x)G(x)$ と $F(x)g(x)$ はともに $[a,b]$ 上の Lebesgue 可測関数で $[a,b]$ 上可積分であることを示せ.

(3) 集合 A 上で値 1 をとり, A^c 上で値 0 をとる関数を $\mathbf{1}_A$ と書くこととする.

$$F(x) = \int_a^b f(y)\mathbf{1}_{\{y<x\}}\,dy$$

である事に注意して

$$\int_a^b F(x)g(x)\,dx = \int_a^b f(y)\big(G(b) - G(y)\big)\,dy$$

を示せ.

(4) 部分積分の公式

$$\int_a^b F(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)G(x)\,dx = F(b)G(b)$$

が成り立つ事を示せ.

問題 I.　$\boldsymbol{R}$ 上連続な関数 $a(x)$, $b(x)$ を係数とする斉次常微分方程式

$$u''(x) + a(x)u'(x) + b(x)u(x) = 0$$

の解の基本系を $(u_1(x), u_2(x))$ とする. ここで $'$ は x についての微分を表す. $f(x)$ を与えられた $\boldsymbol{R}$ 上連続な関数とし, 非斉次常微分方程式

$$(☆) \qquad u''(x) + a(x)u'(x) + b(x)u(x) = f(x)$$

を考える. 以下の問に答えよ.

(1) (☆) の解 $u(x)$ を

$$u(x) = c_1(x)u_1(x) + c_2(x)u_2(x)$$

の形に仮定するとき, $c_i(x)$ $(i = 1, 2)$ が満たすべき方程式を求めよ. また, 連立方程式

$$(\sharp) \qquad \begin{cases} c_1'(x)u_1(x) + c_2'(x)u_2(x) = 0 \\ c_1'(x)u_1'(x) + c_2'(x)u_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

の解 $c_1(x)$, $c_2(x)$ がその方程式を満たすことを示せ.

(2) $(\sharp)$ を解いて, 関数

$$u(x) = \int_0^x \frac{\begin{vmatrix} u_1(y) & u_1(x) \\ u_2(y) & u_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1(y) & u_1'(y) \\ u_2(y) & u_2'(y) \end{vmatrix}} f(y)dy$$

が微分方程式 (☆) の解であることを示せ.

(3) $a(x) = -2x$, $b(x) = x^2 - 1$, $f(x) = e^{x^2/2}$ の場合に, (☆) の解を求めよ.

問題 J.　X をパラメータ $\lambda > 0$ の指数分布に従う確率変数とする．このとき任意のボレル集合 $A \subset [0, \infty)$ に対して

$$P(X \in A) = \int_A \lambda e^{-\lambda t} dt$$

となる．以下の問に答えよ．

(1) $P(X \geq t)$ を計算せよ．

(2) X の期待値 EX を計算せよ．

(3) $n \geq 1$ について, 確率変数 X_n はパラメータ $\lambda_n > 0$ の指数分布に従うものとする．このとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} < \infty$$

ならば,

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n < \infty\right) = 1$$

であることを証明せよ．

問題 K.　下の C 言語によるプログラムの関数 `madd` は配列 a,b に格納した正の整数の和を計算し, 配列 `c` へ格納する関数である. 10 進整数を 2 桁ずつくぎり, `a[1]` に下 2 桁が, `a[2]` に次の 2 桁が, 以下同様な形式で各桁を格納している. `a[0]` は ⌈桁数/2⌉ である. プログラムでは 9998 が `a` に格納されている. 以下の問に答えよ.

(1) `madd` の仕組みを `main` で与えているデータを例に説明せよ.

(2) 下のプログラムで `unsigned char` 型変数を `char` 型変数に変えるとどのような不都合がおきるか述べよ.

(3) 0 を格納するためのデータ構造を定義し, `madd`, `printm` を非負整数に対して動作するように改造しなさい. プログラムには仕組みの解説も書くこと.

```
#include <stdio.h>
main() {
  unsigned char a[10]={2,98,99};
  unsigned char b[10]={3,02,00,99};
  unsigned char c[10];
  madd(a,b,c); printm(c);
}
madd(unsigned char *a,unsigned char *b,unsigned char *c) {
  unsigned char *t;
  int bb;
  int i;
  if (a[0] < b[0]) {t=a; a=b; b=t;}
  c[1] = 0;
  for (i=1; i<=a[0]; i++) {
    if (i <= b[0]) bb = b[i]; else bb=0;
    c[i] = c[i]+a[i]+bb;
    if (c[i] >= 100) {c[i+1]=1; c[i] = c[i]%100; c[0]=i+1;}
    else {c[i+1]=0; c[0]=i;}
  }
}
printm(unsigned char *u) {
  int i;
  for (i=u[0]; i>0; i--) printf("%02d",u[i]);
}
```