平成 16 年度博士課程前期課程入学試験問題: 数学 I

神戸大学自然科学研究科数学専攻
平成 15 年 8 月 27 日
時間: 9:30-12:00

問題 1 から問題 5 の 5 問を解答せよ。解答用紙は 1 問に 1 枚とし、解答した問題の番号を明示すること。

問題 1. V を $\mathbf{R}$ 上の n 次元計量ベクトル空間、つまり内積 (,) をもつ $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間とする。V の部分空間 W にたいし

$$W^{\perp} := \{v \in V \mid (v, w) = 0 \text{ for all } w \in W\ \}$$

とおく。W, W_1, W_2 を V の部分空間とするときつぎの問に答えよ。

1. $W_1 \subset W_2$ のとき、 $W_1^{\perp} \supset W_2^{\perp}$ を示せ。
2. $\dim W^{\perp}$ を $\dim V, \dim W$ を使って表せ（理由も述べること）。
3. $W = (W^{\perp})^{\perp}$ を示せ。

問題 2. $f(x, y)$ は単位円 $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ 上定義された連続関数で $f(-x, -y) = -f(x, y)$ $((x, y) \in C)$ をみたすとする．単位円板 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上の関数 g を $g(0, 0) = 0$ 及び

$$g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot f\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \qquad (x, y) \neq (0, 0)$$

と定める．

1. g は D 上連続であることを示せ．
2. 積分 $\displaystyle\int_D g(x, y)\, dx\, dy$ の値を求めよ．

問題 3. 2 つの添字をもつ実数列 $\{a_{m,n}\}_{m,n=1}^{\infty}$ について極限

$$b_m = \lim_{n \to \infty} a_{m,n} \quad (m = 1, 2, \ldots), \qquad c_n = \lim_{m \to \infty} a_{m,n} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

が存在し，$\lim\limits_{n \to \infty} a_{m,n} = b_m$ の収束は m に関して一様であると仮定する．このとき，極限 $\lim\limits_{n \to \infty} c_n$ が存在すれば，$\lim\limits_{m \to \infty} b_m$ も存在し，両者が一致することを証明せよ．

問題 4. $\mathbf{R}^3$ の原点を中心とする半径 1 の球に内接する正四面体を考える．正四面体を自分自身に移す $\mathbf{R}^3$ の回転全体の成す群を G とする．整数 a, b, c, d の組を 1 つ定めるとき, 正四面体の 4 つの頂点に a, b, c, d を 1 つずつ置く置き方の集合を $S(a, b, c, d)$ とする．

1. $S(1, 2, 3, 4)$ の元の数を求めよ．
2. G の位数をもとめよ．
3. $S(1, 2, 3, 4)$ の 2 つの置き方が, G によって移りあうとき同値であると定めると同値類の集合はいくつあるか？
4. $S(1, 1, 2, 3)$ について, 上の同値類は何個あるか？

問題 5. X, Y を 2 つの位相空間とし、$f,\, g : X \to Y$ を連続写像とする。

1. Y がハウスドルフ空間ならば、集合 $A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ は閉集合であることを示せ。
2. 位相空間 X が連結であることの定義をいえ。
3. X と Y がともに連結であれば、$X \times Y$ も連結であることを示せ。