平成 16 年度博士課程前期課程入学試験問題: 数学 II

神戸大学自然科学研究科数学専攻
平成 15 年 8 月 27 日
時間: 13:00-14:30

問題は A から N まで 14 問ある。この中から 2 問選んで解答しなさい。解答用紙は 1 問に 1 枚とし、選択した問題の番号を明示すること。

問題 A 有理数体 $\mathbf{Q}$ 上, 次の多項式のガロア群の構造を決定せよ.

1. $x^4 - 14x^2 + 9$
2. $x^4 - 20x^2 + 98$

問題 B 一般に、群 G と体 k 上のベクトル空間 V に対し、準同型 $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ を G の V 上の表現という。このとき、次の各問いに答えよ。

1. p を素数とし、$G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を位数 p の巡回群とする。k の標数が p のとき、G の k 上 1 次元の vector 空間への表現 ρ は、必ず $\rho(G) = \{\mathrm{id}\}$ (id: 恒等写像) となることを示せ。
2. $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ とし、k 上 3 次元のベクトル空間 $V = kv_1 \oplus kv_2 \oplus kv_3$ 上の表現 ρ を次で定義する：
$$\rho(1 + 3\mathbb{Z}) \cdot v_i := v_{i+1} \qquad \text{但し}, v_4 := v_1 \text{ とする。}$$
これは、実際に表現を定めている事を示せ。
3. 2. の表現について。k の標数が 3 のとき V の i $(i = 1, 2)$ 次元部分空間 W_i であって、$\rho(G)\cdot W_i \subset W_i$, $V = W_1 \oplus W_2$ となるものは存在しないことを示せ。
4. 2. の表現について。$k = \mathbf{Q}$ のとき V の i $(i = 1, 2)$ 次元部分空間 W_i であって、$\rho(G)\cdot W_i \subset W_i$, $V = W_1 \oplus W_2$ となるものが存在することを示せ。

問題 C
1. $SL_2(\mathbf{C}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} : (x, y, z, w) \in \mathbf{C}^4, \det(A) = 1 \right\}$ は $\mathbf{C}^4$ のアファイン代数多様体として既約であることをしめせ.
2. $SL_2(\mathbf{C})$ は非特異であることをしめせ.
3. 複素数 $a \in \mathbf{C}$ に対して, $V_a = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{C}) : \mathrm{Tr}(A) = a \right\}$ とおく. V_a が特異点をもつとき, a の値をもとめよ.
4. すべての複素数 $a \in \mathbf{C}$ に対して, V_a は既約であることをしめせ.

問題 D
1. 2 次元ユークリッド空間の部分空間 $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1x_2(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 0\}$ の基本群を計算せよ.
2. 3 次元ユークリッド空間の部分空間 $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1x_2x_3(x_1 - 1)(x_2 - 1)(x_3 - 1) = 0\}$ の基本群を計算せよ.

問題 E リー群 G の単位元 $e \in G$ における接空間 T_eG は G のリー環である。$M_{2\times2}(\mathbf{C})$ を 2 次の複素行列全体とし、G を
$$G = SU_2 = \left\{ x \in M_{2\times2}(\mathbf{C}) \;\middle|\; x\overline{x}^t = I, \det x = 1 \right\}$$
で定める。このとき、G のリー環は
$$su_2 = \left\{ X \in M_{2\times2}(\mathbf{C}) \;\middle|\; X + \overline{X}^t = 0, \mathrm{trace}(X) = 0 \right\}$$
となることを示せ。

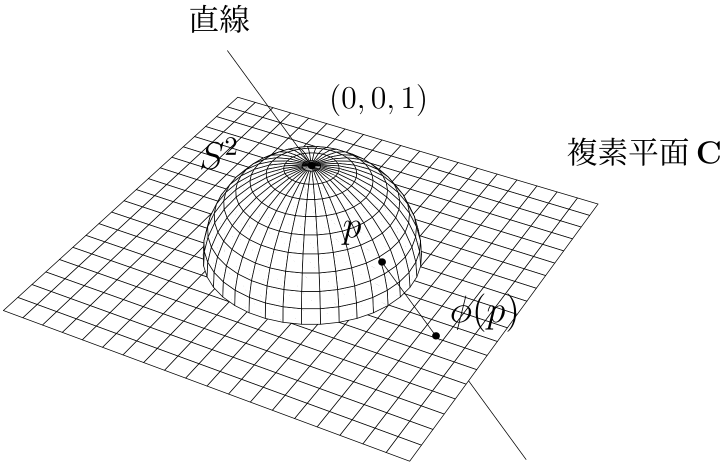

図 1: 立体射影

問題 F　$S^2 = \{(u,v,w) \in \mathbf{R}^3 \mid u^2+v^2+w^2=1\}$ を球面、$\{(u,v,0) \in \mathbf{R}^3 \mid u,v \in \mathbf{R}\} \cup \{\infty\}$ と複素平面 $\mathbf{C}$ の一点コンパクト化とを、$z = u+iv$ によって同一視する。ϕ を S^2 の北極 $(0,0,1)$ から $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ への立体射影とする（図 1 参照)。立体射影 ϕ を用いて次の全単射写像

$$\psi : \mathbf{C} \cup \{\infty\} \to \mathbf{C} \cup \{\infty\}\,, \quad \psi(z) = \frac{z+i}{iz+1}$$

を幾何学的に考察する。

1. ϕ と ϕ^{-1} を具体的に求めよ。
2. 合成写像 $\phi^{-1} \circ \psi \circ \phi$ は S^2 を $\frac{\pi}{2}$ 回転させたものになることを示せ。回転軸を答えよ。
3. 2 を用いて、
$$\psi \circ \psi \circ \psi \circ \psi(z) = \psi(\psi(\psi(\psi(z)))) = z$$
となることを示せ。

問題 G　次の問に答えよ.

（イ）単位円板 $\Delta = \{|z| < 1\}$ 上の正則関数 $f(z)$ が条件 $|f(z)| \leq 1$ $(z \in \Delta)$, $f(0) = 0$ を満たすとき，任意の $z \in \Delta$ に対して，不等式
$$|f(z)| \leq |z|$$
が成立することを証明せよ.

（ロ）$f(z)$ を $\mathbb{C}$ 上の正則関数で，次の条件を満たすものとする.

(1) 定数 $a, b \in \mathbb{C}$ があって
$$f(z+1) = -e^{a(z+\frac{1}{2})}\, f(z), \quad f(z+i) = -e^{b(z+\frac{i}{2})}\, f(z) \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

(2) $f(z)$ は，$z = m + n\,i$ $(m, n \in \mathbb{Z})$ のみに丁度 1 位の零点をもつ.

このとき，4 点 $(\pm 1 \pm i)/2$ を頂点とする正方形 R について，周上の積分 $\displaystyle\int_{\partial R} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$ を計算することにより，等式 $a\,i - b = 2\pi i$ が成立することを示せ.

問題 H 微分方程式

$$(*) \qquad u' = a(z)u^2 + b(z)u + c(z)$$

を考える．ここで $' = d/dz$ とし，$a(z), b(z), c(z)$ は複素平面内の領域 D で正則な関数で $a(z) \not\equiv 0$ とする．次の小問に答えよ．

(1) $v = 1/u$ が満たす微分方程式を求めよ．

(2) 変数変換 $u = -(1/a(z))\,(\log w)'$ によって定まる w に関する微分方程式を求めよ．

(3) $z_0 \in D$ において $a(z_0) \neq 0$ とすると，$(*)$ のどの解も $z = z_0$ において正則であるか，極を持つかのいずれかであることを示せ．

問題 I 関数列 $f_n = f_n(x)$ $(n \geq 0)$ は次の関係式を満たすとする．

(1) $f_n' - nf_{n-1}' + nf_{n-1} = 0, \quad (n \geq 1)$

(2) $xf_n' - nf_n + n^2 f_{n-1} = 0, \quad (n \geq 1)$

このとき，次を示せ．

(3) $f_{n+1} - (2n+1-x)f_n + n^2 f_{n-1} = 0, \quad (n \geq 1)$

(4) $xf_n'' + (1-x)f_n' + nf_n = 0, \quad (n \geq 0)$

問題 J $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続関数で，次の 2 条件を満たすものとする：

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 & (x \in [-1,1]) \\ f(x) = 0 & (x \notin [-1,1]) \end{cases} \qquad \text{(b)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

$n = 1, 2, \ldots$ に対して関数 $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f_n(x) = n\, f(n\,x) \quad (x \in \mathbb{R})$ で定義する．このとき，任意の連続関数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)g(x)\,dx = g(0)$ が成立することを示せ．

問題 K $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間として，X, Y をその上で定義された可積分な確率変数とする．任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して

$$E[X; A] := \int_A X(\omega)P(d\omega) = E[Y; A] := \int_A Y(\omega)P(d\omega)$$

が成り立つならば,

$$P(X = Y) = 1$$

となることを証明せよ．

問題 L k は正の整数とする．

(1) $x > 0$ に対して $\displaystyle\frac{x^k}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}x^k$ であることを示せ．

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^k}{e^x - 1}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k!}{n^{k+1}}$ であることを示せ．

(3) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^k}{e^x + 1}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n k!}{n^{k+1}}$ であることを示せ．

問題 M $\mathcal{M}$ を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の閉部分空間とする．$\mathcal{H}$ におけるノルムを $\|\cdot\|$ で，$\mathcal{H}$ における内積を $(\cdot,\cdot)$ で表すことにする．いま，$u \in \mathcal{H}$ に対して $d = \inf_{v \in \mathcal{M}} \|u - v\|$ とおき，$v_n \in \mathcal{M}, \|u - v_n\| \to d \ (n \to \infty)$ となるような点列 $\{v_n\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ をとる．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 中線定理 $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) \ (u, v \in \mathcal{H})$ を証明せよ．

(2) 中線定理により

$$\|v_m - v_n\|^2 = 2\|u - v_n\|^2 + 2\|u - v_m\|^2 - \left\| 2\left(u - \frac{v_n + v_m}{2}\right)\right\|^2$$

が成立することを示し，これを用いて $\{v_n\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ が $\mathcal{H}$ の Cauchy 列となることを示せ．

問題 N 次の（イ）,（ロ）のいずれかを選んで解答せよ．

（イ）次の各問に答えよ．

(1) データとして与えられた英文のなかで使用されている単語を重複なく列挙しさらにその出現回数を数えるプログラムを書きなさい (使用する計算機言語は自由).

(2) (1) で書いたプログラムの動作の仕組みを解説せよ．

(3) (1) で書いたプログラムの動作効率を計算量の立場から論じなさい．

（ロ）次の各問に答えよ．

(1) 正則行列 A の LU 分解 $A = LU$ (U は上三角, L は対角成分が全て 1 の下三角行列) を行う C プログラムを次の仕様に従い記述し, 概略を説明せよ．

- n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ は引数 `int n` および `double **a` で与えられる．ただし $a_{ij} = \mathtt{a[i-1][j-1]}$ $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$ である．
- 入力行列は pivot 選択を必要としない正則行列とする．
- 結果は `a` に上書きし, 関数内で新たにメモリは確保しない．

(2) (1) の結果を用いて, 与えられた n 次元列ベクトル b に対して $Ax = b$ を満たす x を b に上書きする C プログラムを記述し, 概略を説明せよ．

(3) (1), (2) それぞれのプログラムにおける計算量を評価せよ．