

提出は, 数学事務室に 2007 年 1 月 15 日まで. (3 問中 2 問提出で良い).

問 1.1 一次元射影空間 P^1 を $P^1 = U_0 \cup U_1$ $U_0 = \mathbb{C} \ni z, U_1 = \mathbb{C} \ni w, (z = 1/w)$, なる座標開近傍により被覆する. 各開集合 U_0, U_1 で

$$\begin{cases} h_0(z) = (1 + |z|^2)^{-1} & \text{on } U_0 \\ h_1(z) = (1 + |w|^2)^{-1} & \text{on } U_1 \end{cases}$$

なる関数を定め,

$$\theta_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \partial \log h_i \quad \text{on } U_i.$$

とおく. 次の問に答えよ.

- $U_0 \cap U_1$ 上で, $h_0 = |w|^2 h_1$ をしめし, $\theta_0 - \theta_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \partial \log(w)$ をしめせ.
-

$$\eta = \begin{cases} -d\theta_0 & \text{on } U_0 \\ -d\theta_1 & \text{on } U_1 \end{cases}$$

とおけば, η は P^1 上の大域的 C^∞ 級の 2 型式であり

$$\int_{P^1} \eta = 1$$

をしめせ.

問 1.2 一次元射影空間 P^1 を $P^1 = U_0 \cup U_1$ $U_0 = \mathbb{C} \ni z, U_1 = \mathbb{C} \ni w, (z = 1/w)$, なる座標開近傍により被覆する.

- U_0 上の正則ベクトル場 $\frac{d}{dz}$ を, $U_0 \cap U_1$ 上で w 座標で書くとどうなるか?
- $n \geq 0$ のときに, $U_0 \simeq \mathbb{C}$ 上の正則ベクトル場 $z^n \frac{d}{dz}$ が $z = \infty \Leftrightarrow w = 0$ で, 正則になるための条件を求めよ.
- T_{P^1} を P^1 上の正則接ベクトル束,

$$\Gamma(P^1, T_{P^1}) = \{v : P^1 \text{ 上の } T_{P^1} \text{ の正則切断} \}$$

とするとき, $\Gamma(P^1, T_{P^1})$ の複素ベクトル空間としての次元を求めよ.

問 1.3 2 次特殊線型群 $SL_2(\mathbb{C}) = \{A = \begin{matrix} x & y \\ z & w \end{matrix} \mid \det A = 1\}$ を \mathbb{C}^4 のアファイン超曲面と思う. また $t \in \mathbb{C}$ を固定するとき,

$$V_t = \{A \in SL_2(\mathbb{C}) \mid \text{Tr}(A) = t\}$$

と定める.

- $SL_2(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^4$ は非特異な代数多様体であることをしめせ. (またできれば, 既約であることもしめせ).
- $t \in \mathbb{C}$ を固定するとき, V_t は \mathbb{C}^3 の超曲面と同型であることをしめせ.
- V_t が特異点を持つとすれば, t の値は何か. またそのとき, V_t の特異点に対応する行列 A は何か.