線形代数学 I　模擬試験　担当：齋藤 政彦

解答は, 齋藤のホームページ

http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/mhsaito/lecture-1.html

に, 7 月 13 日以降に掲示する．　期末試験は, 7 月 22 日 2 限目，場所は K402(2005 年度入学物理学科学生）, K403(2005 年入学数学科学生＋ 2004 年度以前の入学者)

日時：2005 年 7 月 8 日

問 1 (10+10+10+10+10=50)

1. 写像 $f : \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^n$ が線形写像である事の定義を述べよ.
2. 線形写像 $f : \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^n$ の核 $\ker f$, $\mathrm{Im} f$ の定義をのべ, $\ker f$ は $\mathbf{R}^m$ の, $\mathrm{Im} f$ は $\mathbf{R}^n$ の部分線形空間であることをしめせ.
3. 線形写像 $f : \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^n$ の階数 $\mathrm{rank} f$ の定義をのべよ.
4. 線形写像 $f : \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^n$ に対して,　次の公式をしめせ.

$$\mathrm{rank} f = m - \dim \ker f.$$

5. $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ は線形写像で

$$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad f(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad f(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

を満たすとき、f を表す行列 A を求めよ．また、求めた A の階数を求めよ.

解答

1. m 次元数ベクトル空間 $\mathbf{R}^m$ から n 次元数ベクトル空間 $\mathbf{R}^n$ への写像 $f : \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^n$ が線形写像とは,

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^m, \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$$
$$f(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y})$$

が成立する時にいう。

2. 線形写像 $f : \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^n$ に対して, $\ker(f) \subset \mathbf{R}^m, \mathrm{Im}(f) \subset \mathbf{R}^n$ を次で定義する.

$$\ker(f) := \{ \ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^m \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$
$$\mathrm{Im}(f) := \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n \mid \ \text{ある } \mathbf{x} \in \mathbf{R}^m \text{ が存在して } \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \ \}.$$

- $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \ker(f), \ \ \forall a \in \mathbf{R}$ に対し、

$$f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2) = 0 + 0 = 0 \implies \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in \ker(f).$$
$$f(a\mathbf{x}_1) = a\, f(\mathbf{x}_1) = a \cdot 0 = 0 \implies a\mathbf{x}_1 \in \ker(f).$$

- $\forall \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathrm{Im}(f), \ \ \forall a \in \mathbf{R}$ に対して、$\exists \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{R}^m$ s.t. $\mathbf{y}_1 = f(\mathbf{x}_1), \mathbf{y}_2 = f(\mathbf{x}_2)$。

$$f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2) = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \implies \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \in \mathrm{Im}(f).$$
$$f(a\mathbf{x}_1) = a\, f(\mathbf{x}_1) = a\mathbf{y}_1 \implies a\mathbf{y}_1 \in \mathrm{Im}(f).$$

3. $\mathrm{rank} f = \dim \mathrm{Im}(f)$. すなわち $\mathrm{Im}(f)$ の一次独立基底の長さ.
4. $\mathrm{rank} f = r$ とする. $\mathrm{rank} f = \dim \mathrm{Im}(f) = r$ であるから $\mathrm{Im}(f)$ の一次独立基底 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_r$ が存在する. $\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_r \in \mathrm{Im}(f)$ であるから $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_r \in \mathbf{R}^m$ を $f(\mathbf{a}_1) = \mathbf{b}_1, \cdots, f(\mathbf{a}_r) = \mathbf{b}_r$ となるようにとれる. また, $\dim \ker f = s$ として $\ker f$ の一次独立基底 $\mathbf{a}_{r+1}, \cdots, \mathbf{a}_{r+s}$ をとっておく. $f(\mathbf{a}_{r+j}) = \mathbf{0}$, $1 \le j \le s$. $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_r, \mathbf{a}_{r+1}, \cdots, \mathbf{a}_{r+s}$ が $\underline{\mathbf{R}^m\text{ の一次独立基底であること}}$ をしめせば, $\mathbf{R}^m$ の次元が m であるから $r+s=m$, すなわち $\mathrm{rank} f + \dim \ker f = m$ となり題意を示す.
$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$ に対して, $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ とおくと $\mathbf{y} \in \mathrm{Im} f$ であるから基底の定義から $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^r a_i \mathbf{b}_i$ なる $a_i \in \mathbf{R}, 1 \le i \le r$ が存在する. $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y} = \sum_{i=1}^r a_i \mathbf{b}_i = f(\sum_{i=1}^r a_i \mathbf{a}_i)$ に注意して $f(\mathbf{x} - \sum_{i=1}^r a_i \mathbf{a}_i) = \mathbf{0}$ がいえるが, これは $\mathbf{x} - \sum_{i=1}^r a_i \mathbf{a}_i \in \ker f$ を示す. よって $c_j \in \mathbf{R}, 1 \le j \le s$ が存在して $\mathbf{x} - \sum_{i=1}^r a_i \mathbf{a}_i = \sum_{j=1}^s c_j \mathbf{a}_{r+j}$ と書ける, すなわち
$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^r a_i \mathbf{a}_i + \sum_{j=1}^s c_j \mathbf{a}_{r+j}$$
となり, $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$ が $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_r, \mathbf{a}_{r+1}, \cdots, \mathbf{a}_{r+s}$ の一次結合で書けることがわかった. 次に、$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_r, \mathbf{a}_{r+1}, \cdots, \mathbf{a}_{r+s}$ の一次独立性をいおう.
$$a_1\mathbf{a}_1 + \cdots + a_r\mathbf{a}_r + c_1\mathbf{a}_{r+1} + \cdots + c_s\mathbf{a}_{r+s} = \mathbf{0}.$$
とおく. これに線形写像 f を施すと $f(\mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_i, f(\mathbf{a}_{r+j}) = \mathbf{0}$ であるから
$$a_1\mathbf{b}_1 + \cdots a_r\mathbf{b}_r + \mathbf{0} + \cdots + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$
$\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_r$ は一次独立であるから $a_1 = \cdots = a_r = 0$. すると
$$c_1\mathbf{a}_{r+1} + \cdots + c_s\mathbf{a}_{r+s} = \mathbf{0}$$
$\mathbf{a}_{r+1}, \cdots, \mathbf{a}_{r+s}$ は一次独立だから $c_1 = \cdots = c_s = 0$. これらをあわせて, $a_1 = \cdots = a_r = c_1 = \cdots = c_s = 0$. よって $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_r, \mathbf{a}_{r+1}, \cdots, \mathbf{a}_{r+s}$ は一次独立.
5. f を表わす行列を A とすると, 題意は行列の恒等式
$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -6 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$
と同値である. よって $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ とおけば,
$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} B^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -6 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -7 \\ -3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
よって
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

階数：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}f = 2$.

問 2 (20+30) 次の問にこたえよ.

1. x を実数とする. 次の行列の行列式をもとめ, 各 x に対して行列の階数をもとめよ.

$$A := \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ x^2 & -x & -2 & x+1 \end{pmatrix}$$

2. 次の行列の行列式と余因子行列をもとめて,　逆行列があるときは逆行列をもとめよ.

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix},$$

解答

1.

$$|A| = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ x^2 & -x & -2 & x+1 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{cc|cc} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & x & -1 \\ 0 & 0 & -2 & x+1 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} x & -1 \\ 0 & x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & -1 \\ -2 & x+1 \end{vmatrix}$$

$$= x^2(x-1)(x+2)$$

- $x(x-1)(x+2) \neq 0$ のとき, $\mathrm{rank}A = 4$.
- $x = 0$ のとき:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{rank}A = 3.$$

- $x = 1$ のとき:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{rank}A = 3.$$

- $x=-2$ のとき:

$$A := \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \mathrm{rank} A = 3.$$

2. $\det B = 6+2+12-9-2-8 = 1$,

$${}^t\tilde{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -7 \\ -3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{\det B} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -7 \\ -3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -7 \\ -3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

C の余因子行列は

$${}^t\tilde{C} = \begin{pmatrix} bc(c-b) & b^2-c^2 & -b+c \\ ac(a-c) & c^2-a^2 & a-c \\ ab(b-a) & a^2-b^2 & b-a \end{pmatrix}$$

$\det C = -(a-b)(a-c)(b-c)$. よって a,b,c が相異なる時, $\det C \neq 0$ で, そのとき逆行列は

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C}{}^t\tilde{C} = -\frac{1}{(a-b)(a-c)(b-c)} \begin{pmatrix} bc(c-b) & b^2-c^2 & -b+c \\ ac(a-c) & c^2-a^2 & a-c \\ ab(b-a) & a^2-b^2 & b-a \end{pmatrix}.$$

問 3 (10+20+20 = 50)

1. $\mathbf{R}^n$ の k 個のベクトル $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$ が一次独立である事の定義を言え。
2. $A := \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ -2 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき, A^2, A^3 を計算し, $\mathrm{rank}A, \mathrm{rank}A^2, \mathrm{rank}A^3$ をもとめよ.
3. a,b,c が異なる実数であるとき t の関数 e^{at}, e^{bt}, e^{ct} は　一次独立であることをしめせ.

解答

1. $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k \in \mathbf{R}^n$ が次の条件を満たす時、$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$ は一次独立であるという。

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0} \quad \alpha_i \in \mathbf{R}\ (i = 1, 2, \cdots, k)$$

$$\Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

2.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

まず $A^3=O$ より, $\mathrm{rank}A^3=0$. A, A^2 を掃きだし方で階段行列にする.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ -2 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{rank}A=2$$

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{rank}A^2=1.$$

よって, $\mathrm{rank}A=2, \mathrm{rank}A^2=1, \mathrm{rank}A^3=0$.

3. $f(t)=\alpha_1 e^{at}+\alpha_2 e^{bt}+\alpha_3 e^{ct}$ とおいて $f(t)\equiv 0$ ならば, $f(0)=f'(0)=f''(0)=0$ を用いて

$$\begin{aligned} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 &= 0 && (1)\\ a\alpha_1+b\alpha_2+c\alpha_3 &= 0 && (2)\\ a^2\alpha_1+b^2\alpha_2+c^2\alpha_3 &= 0 && (3)\\ & && (4) \end{aligned}$$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

とおけば, $\det C\neq 0$ であり, 上の解 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$ のみである. よって e^{at}, e^{bt}, e^{ct} は (実数体上) 一次独立.

問 4 (5+10+5+10+20=50 点)

1. $\mathbf{R}^3$ の原点 $O(0,0,0)$, $A(2,-1,-1)$, $B(-1,2,-1)$ の 3 点を通る平面 H の方程式をもとめよ.
2. $P(x,y,z)$ に対しベクトル $\vec{OP}$ を平面 H に正射影したベクトルの終点を $Q(X,Y,Z)$ とおく. X,Y,Z を x,y,z の式であらわせ.
3. 上で与えられた写像 $f:\mathbf{R}^3\longrightarrow\mathbf{R}^3$, $(X,Y,Z)=f((x,y,z))$ は線形写像であることをしめし, 対応する行列 P をもとめよ. また $P^2=P$ をしめせ.
4. $\mathbf{b}={}^t(b_1,b_2,b_3)$ に対して, 連立方程式 $P\mathbf{x}=\mathbf{b}$ が解を持つための必要十分条件をもとめよ.
5. $\ker P=\ker f$ が一次元であることをしめし, $\ker P$ のゼロでないベクトル $\mathbf{c}={}^t(c_1,c_2,c_3)$ をひとつさだめよ. また

$$Q=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & c_1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & c_2 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & c_3 \end{pmatrix}$$

とさだめるとき $Q^{-1}PQ$ を計算し, その結果の意味を述べよ.

解答

1. H の法線ベクトルを $\vec{n}:=(a,b,c)$ とおくと, $\vec{n}\perp\vec{OA}, \vec{n}, \perp\vec{OB}$ より $2a-b-c=0, -a+2b-c=0$. これを解いて $(a,b,c)//(1,1,1)$. よって H は原点をとおるから $H: x+y+z=0$.

2. $\vec{PQ} = (X-x, Y-y, Z-z) // \vec{n} = (1,1,1)$. $X-x=k, Y-y=k, Z-z=k$ なる実数 k がある．$X = x+k, Y = y+k, Z = z+k$. $Q = (X,Y,Z)$ は H 上にあるので $(x+k)+(y+k)+(z+k) = 0$. これより $k = -\frac{x+y+z}{3}$.
これから $X = \frac{2x-y-z}{3}, Y = \frac{-x+2y-z}{3}, Z = \frac{-x-y+2z}{3}$.
3. 上の式の形から明らかに線形写像であり,

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}. \text{また} \quad P^2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = P.$$

4. 明らかに $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} P$ は, 平面 H ある．よって $P\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解を持つための必要十分条件は $\mathbf{b} \in H$.
5. $P\mathbf{c} = \mathbf{0}$ を解くと, $2c_1 - c_2 - c_3 = -c_1 + 2c_2 - c_3 = 0$ であるから, $\mathbf{c} = ^t(1,1,1) \ker P$ が例である．

$$Q = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 1 \\ -1/3 & 2/3 & 1 \\ -1/3 & -1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

に対し $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ であり

$$Q^{-1}PQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$Q^{-1}PQ$ は $(x,y,z) \mapsto (x,y,0)$ である．　すなわち (x,y,z) から xy 平面への正射影である．よって Q によって xy 平面が H に移され P は平面 H への射影, $Q^{-1}PQ$ は xy 平面への射影である．

問 5 $\mathbf{R}^m$ の n 個のベクトル $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ をとり, それを並べた $m \times n$ 行列を $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n)$ とする．また対応する線形写像を $f_A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$ と記す．$(f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.)$ $\mathrm{rank} A$ を問 1 の定義による $\mathrm{rank} f_A$ により定めるとき, その $\mathrm{rank} A$ が行変形によって, 階段行列にする事によって得られる事を次の事柄を証明する事によって説明せよ．

1. A の行変換は，左から基本行列 P を掛けることによって得られる事.

$$A \longrightarrow PA$$

2. 基本行列 P は正則行列である事.
3. $\mathrm{rank} A = \mathrm{rank} PA$.
4. 階段行列の階数が, 上から何段まで 0 でない項がでてくるかで表せる事.

解答　解答は, 教科書 38 ページから 42 ページまでの 1.7 章を参照の事.