線形代数学 I　模擬試験　担当：齋藤 政彦

解答は, 齋藤のホームページ

http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/mhsaito/lecture-1.html

に, 7 月 13 日以降に掲示する．　期末試験は, 7 月 22 日 2 限目，場所は K402(2005 年度入学物理学科学生），K403(2005 年入学数学科学生＋ 2004 年度以前の入学者)

日時：2005 年 7 月 8 日

問 1 (10+10+10+10+10=50)

1. 写像 $f : \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^n$ が線形写像である事の定義を述べよ.
2. 線形写像 $f : \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^n$ の核 $\ker f$, $\mathrm{Im} f$ の定義をのべ, $\ker f$ は $\mathbf{R}^m$ の, $\mathrm{Im} f$ は $\mathbf{R}^n$ の部分線形空間であることをしめせ.
3. 線形写像 $f : \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^n$ の階数 $\mathrm{rank} f$ の定義をのべよ.
4. 線形写像 $f : \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^n$ に対して，　次の公式をしめせ.

$$\mathrm{rank} f = m - \dim \ker f.$$

5. $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ は線形写像で

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

を満たすとき、f を表す行列 A を求めよ．また、求めた A の階数を求めよ.

問 2 (20+30) 次の問にこたえよ.

1. x を実数とする. 次の行列の行列式をもとめ, 各 x に対して行列の階数をもとめよ.

$$A := \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ x^2 & -x & -2 & x+1 \end{pmatrix}$$

2. 次の行列の行列式と余因子行列をもとめて，　逆行列があるときは逆行列をもとめよ.

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix},$$

問 3 (10+20+20 = 50)

1. $\mathbf{R}^n$ の k 個のベクトル $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$ が一次独立である事の定義を言え。

2. $A := \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ -2 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき, A^2, A^3 を計算し, $\mathrm{rank}A, \mathrm{rank}A^2, \mathrm{rank}A^3$ をもとめよ.
3. a, b, c が異なる実数であるとき t の関数 e^{at}, e^{bt}, e^{ct} は　一次独立であることをしめせ.

問 4 (5+10+5+10+20=50 点)

1. $\mathbf{R}^3$ の原点 $O(0,0,0)$, $A(2,-1,-1)$, $B(-1,2,-1)$ の 3 点を通る平面 H の方程式をもとめよ.
2. $P(x,y,z)$ に対しベクトル $\vec{OP}$ を平面 H に正射影したベクトルの終点を $Q(X,Y,Z)$ とおく. X,Y,Z を x,y,z の式であらわせ.
3. 上で与えられた写像 $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, $(X,Y,Z) = f((x,y,z))$ は線形写像であることをしめし, 対応する行列 P をもとめよ. また $P^2 = P$ をしめせ.
4. $\mathbf{b} =^t (b_1, b_2, b_3)$ に対して, 連立方程式 $P\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解を持つための必要十分条件をもとめよ.
5. $\ker P = \ker f$ が一次元であることをしめし, $\ker P$ のゼロでないベクトル $\mathbf{c} =^t (c_1, c_2, c_3)$ をひとつさだめよ.　また
$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & c_1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & c_2 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & c_3 \end{pmatrix}$$
とさだめるとき $Q^{-1}PQ$ を計算し, その結果の意味を述べよ.

問 5 $\mathbf{R}^m$ の n 個のベクトル $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ をとり, それを並べた $m \times n$ 行列を $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n)$ とする. また対応する線形写像を $f_A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$ と記す. $(f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.)$ $\mathrm{rank}A$ を問 1 の定義による $\mathrm{rank}f_A$ により定めるとき, その $\mathrm{rank}A$ が行変形によって, 階段行列にする事によって得られる事を次の事柄を証明する事によって説明せよ.

1. A の行変換は, 左から基本行列 P を掛けることによって得られる事.
$$A \longrightarrow PA$$
2. 基本行列 P は正則行列である事.
3. $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}PA$.
4. 階段行列の階数が, 上から何段まで 0 でない項がでてくるかで表せる事.