平成 15 年度博士課程前期課程入学試験問題: 数学 I

神戸大学自然科学研究科数学専攻
平成 14 年 8 月 28 日
時間: 9:30 – 12:00

以下の問題 4 問すべてについて解答せよ. 解答用紙は 1 問につき 1 枚ずつ用いよ.

1. 次の (1), (2) に答えよ.

(1) 実数値関数 $f(x)$ が, 区間 $[0,1]$ 上で連続かつ単調増加のとき,

$$\int_0^1 xf(x)dx \geq \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx$$

が成立することを証明せよ.

(2) 有界な実数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ に対して, 次の (a), (b) を示せ.

(a)

$$\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n.$$

(b)

$$\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n.$$

2. X, Y を 2 つの位相空間とし, $\phi : X \to Y$ を位相同型写像とする.

(1) 次を示せ：「X がコンパクト」と「Y がコンパクト」は同値である.

(2) $\{p_1, ..., p_k\} \subset X$ を X 内の任意の k 個の点とする. X, Y の部分空間

$$\hat{X} = X \setminus \{p_1, ..., p_k\}\ , \quad \hat{Y} = Y \setminus \{\phi(p_1), ..., \phi(p_k)\}$$

を定義する. 次を示せ：「$\hat{X}$ が連結」と「$\hat{Y}$ が連結」は同値である.

(3) 通常の位相を持っている 4 つの位相空間を考える：

$$M_1 = \boldsymbol{R}^1\ , \qquad M_2 = (0,1) \subset \boldsymbol{R}^1\ ,$$

$$M_3 = S^1 = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \,|\, x^2+y^2 = 1\}\ , \qquad M_4 = \boldsymbol{R}^2\ .$$

(1) と (2) を使って, 位相同型でない M_i と M_j の組をすべて見つけよ.

(4) M_i と M_j の 1 つの組は位相同型である. その組 M_i と M_j に対する具体的な位相同型写像 $\phi : M_i \to M_j$ を作れ.

3. 次の問に答えよ.

(1) 複素 n 次元ベクトル空間 $\boldsymbol{C}^n$ の列ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ に対し, 内積を $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}\bar{\boldsymbol{y}}$ と定義する. ただし, $\bar{\boldsymbol{y}}$ は $\boldsymbol{y}$ の各成分の複素共役を成分とするベクトルを表す. 次式が成り立つことを示せ.

(a) $(\boldsymbol{x}, c\boldsymbol{y}) = \bar{c}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \quad (c \in \boldsymbol{C})$ (b) $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \overline{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}$ (c) $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \Rightarrow (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0$

(2) A を実対称行列 (すなわち ${}^tA = A$ をみたす) とすると, A の固有値はすべて実数であることを示せ.

(3) B が実行列のとき ${}^tBB$ の固有値は, 非負実数であることを示せ.

4. 次の (1), (2) に答えよ.

(1)

$$G := \left\{ A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha, \beta \in \boldsymbol{C}, \det A = 1 \right\}$$

とおく, ただし $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$ はそれぞれ α, β の複素共役.

G は一般線形群 $GL(2, \boldsymbol{C})$ の部分群になることを示せ.

(2)

$$H := \left\{ A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \middle| \, \begin{array}{c} \alpha = a + bi, \beta = c + di, \\ a, b, c, d \in \boldsymbol{Z}, \det A = 1 \end{array} \right\}$$

とおく, ただし i は虚数単位. 次の問に答えよ.

(a) H は群 G の部分群になることを示せ. またその位数を求めよ.

(b) H の交換子群 $[H, H]$ が

$$[H, H] = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

で与えられることを示せ.

(c) H から乗法群 $\boldsymbol{C}^{\times} := \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ への準同型をすべて求めよ.