平成 15 年度博士課程前期課程入学試験問題: 数学 II

神戸大学自然科学研究科数学専攻
平成 14 年 8 月 28 日
時間: 13:00 – 14:30

問題は **A** ~ **O** の 15 問ある. 以下の問題から任意の 2 問を選んで解答せよ. 解答用紙は 1 問につき 1 枚ずつ用いよ.

A. 位相空間 X, Y とその間の連続写像 $f : X \to Y$, および f によって誘導された基本群の間の準同型写像 $f_* : \pi_1(X, p) \to \pi_1(Y, f(p))$ について, 次の命題が正しければ証明をし, 正しくなければ例をあげて正しくないことを示せ.

(1) f が単射であれば, f_* も単射である.

(2) f が全射であれば, f_* も全射である.

B. 次の曲線族を考える：

$$\begin{aligned}\mathcal{F} \;=\; \{\, \text{曲線}\,(x, f(x)) \in \boldsymbol{R}^2, \quad 0 \le x \le 1 \;\;|\;\; & \\ & f(0) = f(1) = 0, \\ & f(x)\ \text{は}\ [0,1]\ \text{上で非負かつ連続}, \\ & f(x)\ \text{は有限個の点を除いて}\ C^1\text{-級かつ} \left|\frac{df}{dx}\right| \le 1 \}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{R}^2$ の接空間の計量

$$(a_1, a_2) \bullet (b_1, b_2) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

によって, 曲線の弧長を定義する.
次の問に答えよ.

(1) 計量

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の場合に, $\mathcal{F}$ 内の一番短い曲線を見つけよ. その曲線の弧長を求めよ.

(2) 計量

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

の場合に, $\mathcal{F}$ 内の一番短い曲線を見つけよ. その曲線の弧長を求めよ.

C. 曲線

$$\alpha(t) = (t, \cosh t) \in \boldsymbol{R}^2\ , \qquad t \in \boldsymbol{R}$$

は懸垂線と呼ばれている.

(1) $\alpha(t)$ の一般の点で, $\alpha(t)$ の曲率を計算せよ.

(2) $a > 0$ のとき点 $(0,1)$ から点 $(a, \cosh a)$ への上の曲線のユークリッド計量に関する弧長を求めよ.

D. 次の問に答えよ.

(1) 単項イデアル整域 R の 0 でも全体でもない素イデアル $\mathcal{P}$ は, 極大イデアルであることを示せ.

(2) 次の環が単項イデアル整域であるかどうか理由をつけて述べよ.

(a) 整数のなす環 $\boldsymbol{Z}$.

(b) p を素数, $\boldsymbol{F}_p = \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ とおくとき, $\boldsymbol{F}_p$ 上の一変数多項式環 $\boldsymbol{F}_p[x]$.

(c) $\boldsymbol{Z}$ 上の多項式環 $\boldsymbol{Z}[x]$.

E. p を素数, $\boldsymbol{F}_p$ を p 個の元から成る有限体とし,

$$G = GL_2(\boldsymbol{F}_p) = \{A \in \mathrm{M}_2(\boldsymbol{F}_p) \mid \det A \neq 0\}$$

とおく.

(1) 有限群 G の位数を求めよ.

(2) $\boldsymbol{F}_p$ 係数の 2 次でモニックな既約多項式の個数を求めよ.

(3) $f(x) = x^2 + ax + b \in \boldsymbol{F}_p[x]$ が既約とする. $f(x)$ を固有多項式とする行列 $A \in \mathrm{M}_2(\boldsymbol{F}_p)$ を 1 つ与え A の G における中心化群

$$\mathrm{C}_G(A) = \{B \in G \mid AB = BA\}$$

の位数を求めよ.

(4) G の共役類の個数を求めよ.

F. 次の問に答えよ.

(1) 2 変数 q, z の形式的巾級数として, 次の等式を示せ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n z}{1 - q^n z} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m z^m}{1 - q^m}$$

(2) 上式を q について巾級数展開したときの q^n の係数を求めよ.

(3) q を $|q| < 1$ なる複素数とする. (1) の等式の各辺は複素変数 z の関数としてどのような意味をもつか. また, この場合に, (1) の等号の意味は何か.

G. T を正の定数とする.

(1) t の関数 x についての微分方程式

$$(*) \qquad x''(t) - x(t) = 0$$

の解の基底を与えよ.

(2) 境界条件

$$x'(0) = 0, \qquad x'(T) = 0$$

をみたす閉区間 $[0, T]$ における微分方程式 $(*)$ の解は恒等的に 0 となるものに限ることを示せ.

(3) $f(t)$ を閉区間 $[0, T]$ で連続な関数とする.

$$x_0(t) := e^t \int_0^t \frac{e^{-s}}{2} f(s)\, ds - e^{-t} \int_0^t \frac{e^s}{2} f(s)\, ds$$

は閉区間 $[0, T]$ において微分方程式

$$(**) \qquad x''(t) - x(t) = f(t)$$

の解であることを確かめよ.

(4) 任意の実定数 $a,\ b$ と閉区間 $[0, T]$ で連続な任意の関数 $f(t)$ に対して

$$x'(0) = a, \qquad x'(T) = b$$

をみたす $[0, T]$ における微分方程式 $(**)$ の解がただ 1 つ存在することを示せ.

H. $\psi_n(x)$ $(n \in \boldsymbol{Z})$ なる関数列が, 次の 3 項間漸化式をみたすとする.

$$\psi_{n+1}(x) + u_n \psi_n(x) + v_n \psi_{n-1}(x) = x\ \psi_n(x) \qquad (n \in \boldsymbol{Z}) \tag{a}$$

ここで u_n, v_n $(n \in \boldsymbol{Z})$ は x に依存しない定数である. 今, 適当な数列 a_n $(n \in \boldsymbol{Z})$ を用いて, 新しい関数列 $\widetilde{\psi}_n(x)$ $(n \in \boldsymbol{Z})$ を

$$\widetilde{\psi}_n(x) = \psi_n(x) + a_n \psi_{n-1}(x) \qquad (n \in \boldsymbol{Z}) \tag{b}$$

で定義する. このとき $\widetilde{\psi}_n(x)$ $(n \in \boldsymbol{Z})$ が再び同じ形の 3 項間漸化式

$$\widetilde{\psi}_{n+1}(x) + \widetilde{u}_n \widetilde{\psi}_n(x) + \widetilde{v}_n \widetilde{\psi}_{n-1}(x) = x\ \widetilde{\psi}_n(x) \qquad (n \in \boldsymbol{Z}) \tag{c}$$

をみたすようにしたい. 以下, $a_n \neq 0$ $(n \in \boldsymbol{Z})$ とする.

(1) a_n $(n \in \boldsymbol{Z})$ のみたすべき条件を求めよ.

(2) 別の関数列 $\varphi_n(x)$ $(n \in \boldsymbol{Z})$ で (**??**) と同じ漸化式をみたすものが与えられたとする. そこで, 点 $x = \xi$ を 1 つ選び,

$$a_n = -\frac{\varphi_n(\xi)}{\varphi_{n-1}(\xi)} \qquad (n \in \boldsymbol{Z}) \tag{d}$$

とおく (ただし ξ は, 各 a_n が 0 でない値として意味を持つように選ぶ). これで (1) の条件がみたされることを確認し, そのときの $\widetilde{u}_n, \widetilde{v}_n$ $(n \in \boldsymbol{Z})$ を求めよ.

I. a を正の数とし, これを固定する. このとき, $\xi \in \boldsymbol{R}$ の関数

$$f(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{-1}x\xi}}{x^2+a^2}dx$$

について, 次の問に答えよ.

(1) 等式 $f(-\xi) = f(\xi)$ を示せ.

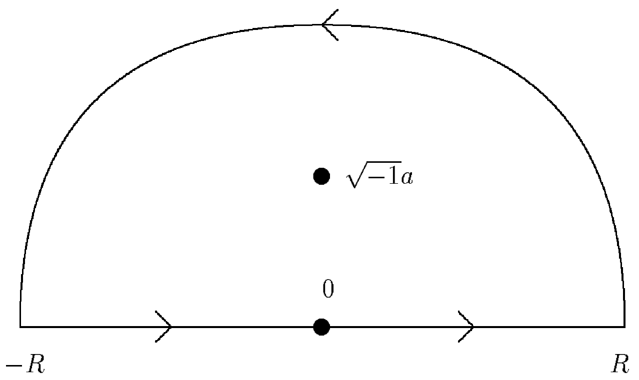
(2) 関数 $f(\xi)$ は次の式で与えられることを示せ:

$$f(\xi) = \frac{\pi}{a}e^{-a|\xi|}.$$

(Hint: $\xi > 0$ のとき, 以下の積分について考察をし, $R \longrightarrow \infty$ とせよ:

$$\int_\Gamma \frac{e^{\sqrt{-1}x\xi}}{x^2+a^2}dx.$$

ただし, 積分路 Γ は以下の図で与えられるものとする.)



J. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間, $X_1, X_2, \ldots$ を Ω 上の平均 0 である 2 乗可積分な独立確率変数列とする. 次の問に答えよ.

(1) $a \geq 0$ に対して $\tau_a = \min\{n \geq 1; X_1 + X_2 + \cdots + X_n \geq a\}$ とおく. $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ とするとき, 任意の $k \geq 1$ に対して

$$\{\tau_a \leq k\} \in \mathcal{F}_k$$

が成立することを示せ.

(2) $S_k = \sum_{j=1}^k X_j$ とおく. $k \leq n$ のとき

$$\int_{\{\tau_a = k\}} S_k^2(\omega)P(d\omega) \leq \int_{\{\tau_a = k\}} S_n^2(\omega)P(d\omega)$$

を証明せよ.

(3) $\{\tau_a = k\}$ の上では $S_k^2 \geq a^2$ であることを用いて, $a > 0$ のとき

$$P\left(\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq a\right) \leq \frac{1}{a^2}\int_\Omega S_n^2(\omega)P(d\omega)$$

を証明せよ.

K. 測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ は $\mu(X_n) < \infty$ $(n \in \boldsymbol{N})$ かつ $X = \bigcup_{n \in \boldsymbol{N}} X_n$ をみたすとする．次の問に答えよ．

(1) f, g を X 上の $[0, \infty)$ に値を取る可測関数とし, $f(x) \leq g(x)$ $(x \in X)$ であるとする．

$$\int_X f(x)\,\mu(dx) = \int_X g(x)\,\mu(dx)$$

ならば $f = g$ a.e. であることを示せ．

(2) f を X 上の $[0, \infty)$ に値を取る可測関数とし, H を X 上の $[0, \infty)$ に値を取る可測関数 g で $f(x) < g(x)$ $(x \in X)$ であるもの全体の集合とする．

$$\int_X f(x)\,\mu(dx) = \inf_{g \in H} \int_X g(x)\,\mu(dx)$$

であることを示せ．

L. 実数 p は $1 \leq p < \infty$ をみたし, 数列空間 l^p の点列 $\{u^{(n)}\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ は次の条件 (a) と (b) をみたしているとする (各 $n \in \boldsymbol{N}$ に対して, 複素数列 $u^{(n)}$ は $(u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, \ldots)$ で表す):

(a) 任意の自然数 k に対して, $n \to \infty$ のとき $u_k^{(n)} \to u_k$ となるような複素数 u_k が存在する．

(b) 任意の正の数 ε に対して,

$$\sum_{k=K+1}^{\infty} |u_k^{(n)}|^p < \varepsilon^p, \qquad \forall n \in \boldsymbol{N}$$

をみたすような n には依存しない自然数 K が存在する．

いま, $u = (u_1, u_2, \ldots)$ とおく．このとき, $u \in l^p$ であり, l^p において点列 $\{u^{(n)}\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ は u に収束する．このことを, 以下の設問に従って証明せよ．(念のために書いておくと, 数列空間 l^p は, 複素数列 $v = (v_1, v_2, \ldots)$ で $\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^p < \infty$ をみたすもの全体の集合に, ノルム $\|v\|_{l^p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^p\right)^{1/p}$ が備えられた Banach 空間である.)

次の問に答えよ．

(1) $\sum_{k=K+1}^{\infty} |u_k|^p \leq \varepsilon^p$ が成立することを示せ．ただし, ε と K は条件 (b) のものである．

(2) 0 以上の数 a と b に対して, $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$ が成立することを示せ．また, これを用いて,

$$\sum_{k=K+1}^{\infty} |u_k^{(n)} - u_k|^p \leq 2^{p-1} \left(\sum_{k=K+1}^{\infty} |u_k^{(n)}|^p + \sum_{k=K+1}^{\infty} |u_k|^p \right)$$

が成立することを示せ．

(3) $u \in l^p$ であり, $n \to \infty$ のとき $\|u^{(n)} - u\|_{l^p} \to 0$ となることを示せ．

M. $D = \{z \in \boldsymbol{C} \mid |z| < 1\}$ とし, $\boldsymbol{C}$ 上の Lebesgue 測度を dV で表すことにする. いま, D で正則な関数の列 $\{f_n\}$ で次をみたすものを考える: 定数 $M > 0$ が存在して, すべての自然数 n に対して

$$\int_D |f_n(z)|^2 \, dV \leq M$$

が成立する. 次の問に答えよ.

(1) $z = re^{i\theta}$ $(0 \leq r < 1)$ として, $f_n(z)$ を

$$f_n(re^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{n,k} r^k e^{ik\theta}$$

と展開することにする. このとき,

$$\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|c_{n,k}|^2}{k+1} \leq M$$

が成立することを示せ.

(2) $0 < R < 1$ とする. $0 \leq |z| \leq R$ のとき,

$$|f_n(z)| \leq \left(\frac{M}{\pi}\right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) R^{2k}\right)^{1/2}$$

が成立することを示せ. また, 上の不等式の右辺が有限であることを確かめ, このことから, 関数列 $\{f_n\}$ は D の任意のコンパクト集合 K 上で一様有界であることを示せ.

N. G はグラフであるとして命題 (A), (B) を考える.

(A) G は連結性に関して極小である. すなわち,

1. G は連結である.

かつ

2. G の任意の 1 辺 e に対して, G から e を除いた部分グラフは非連結である.

(B) G はサイクルを含まないと言う意味で極大である.

次の問に答えよ.

(1) 命題 (B) を説明せよ.

(2) 命題 (A), (B) の関係を示せ.

O. 次の問に答えよ.

(1) 任意の大きさの自然数を保持するためのデータ構造を, C 言語における構造体で定義せよ. ただし, sizeof(int) = 4, sizeof(short) = 2 とする.

(2) (1) で定義した構造体データを入出力とする, 2 つの自然数の積を計算する関数を C 言語で記述せよ. ただし, 出力データ用のメモリは, 関数内で確保せよ.

(3) 2 つの n bit 自然数の積を (2) の関数で計算する場合の計算量を評価せよ.