**基礎解析 II 演習問題 1 解説**　2006 年 10 月 17 日

**問 1.1**　次の命題 (1), (2) を $\varepsilon - \delta$ 論法で示せ.
(1)　$f(x,y) := x^2y^3$ は任意の $(a,b)$ において連続である.
(2)　$f(x,y), g(x,y)$ が $(a,b)$ で連続ならば, $f(x,y)+g(x,y)$ も $f(x,y)g(x,y)$ も $(a,b)$ で連続である.

**解説**
(1) 点 $(a,b)$ を固定する．任意に $\varepsilon >$ が与えられたとする．(以後この $\varepsilon$ は固定することに注意せよ．)

$$|x^2y^3 - a^2b^3| \le |x^2y^3 - a^2y^3| + |a^2y^3 - a^2b^3| \le |x-a|(|x|+|a|)|y|^3 + |y-b|(|y|^2+|y||b|+|b|^2)|a|^2.$$

$|x-a|<1, |y-b|<1$ のとき $|x|<|a|+1, |y|<|b|+1$ である．したがってこのとき $|x|+|a|<2|a|+1$, $|y|^3<(|b|+1)^3$, $|y|^2+|y||b|+|b|^2<3|b|^2+3|b|+1$, $|a|^2<(|a|+1)^2$. よって $|x-a|<1, |y-b|<1$ のとき

$$|x^2y^3 - a^2b^3| < (2|a|+1)(|b|+1)^3|x-a| + (|a|+1)^2(3|b|^2+3|b|+1)|y-b|.$$

したがって, 与えられた $\varepsilon > 0$ に対して

$$\delta := \min\{1, \frac{\varepsilon/2}{(2|a|+1)(|b|+1)^3}, \frac{\varepsilon/2}{(|a|+1)^2(3|b|^2+3|b|+1)}\}$$

ととると, $|x-a|<\delta, |y-b|<\delta$ のとき

$$|x^2y^3 - a^2b^3| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

が成り立つ.
(2) $f(x,y)g(x,y)$ の連続性だけを示そう．点 $(a,b)$ を固定する．任意に $\varepsilon >$ が与えられたとする．まず

$$|f(x,y)g(x,y) - f(a,b)g(a,b)| \le |g(x,y)||f(x,y)-f(a,b)| + |f(a,b)||g(x,y)-g(a,b)|$$

に注意する．仮定から, $\delta_1 >$ を十分に小さくとると, $|x-a|<\delta_1$, $|y-b|<\delta_1$ のとき $|g(x,y)| \le |g(x,y)-g(a,b)| + |g(a,b)| < |g(a,b)|+1$ が, また当り前の不等式 $|f(a,b)| < |f(a,b)|+1$ が成り立つので, $|x-a|<\delta_1$, $|y-b|<\delta_1$ のとき

$$|f(x,y)g(x,y) - f(a,b)g(a,b)| < (|g(a,b)|+1)|f(x,y)-f(a,b)| + (|f(a,b)|+1)|g(x,y)-g(a,b)|$$

が成り立つ．再び仮定から $\delta_2 >$ を十分小さくとると, $|x-a|<\delta_2$, $|y-b|<\delta_2$ に対して

$$|f(x,y)-f(a,b)| < \frac{\varepsilon/2}{|g(a,b)|+1}, \quad |g(x,y)-g(a,b)| < \frac{\varepsilon/2}{|f(a,b)|+1}$$

が成り立つ．したがって $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ と定めると $|x-a|<\delta$, $|y-b|<\delta$ なるとき

$$|f(x,y)g(x,y) - f(a,b)g(a,b)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

が成り立つ.

**問 1.2**　教科書 p.8 の定理 2 を証明せよ.

**解説** $R$ を平面上の有界閉集合とし、$f(x,y)$ を $R$ で定義された実数値連続関数とする．$f(R) := \{f(x,y) \mid (x,y) \in R\}$ とする.
$f(R)$ が上に有界の場合: $M := \sup f(R)$ とすると $M \in \mathbf{R}$ で、$f(x_n,y_n) \to M$ $(n\to\infty)$ を満たす $R$ における点列 $\{(x_n,y_n)\}_n \subset R$ が存在する．定理 1(Bolzano-Weierstrass) から、適当な部分列 $\{(x_{n_k},y_{n_k})\}_k$ と点 $(a,b)\in R$ で $(x_{n_k},y_{n_k}) \to (a,b)$ $(k\to\infty)$ となるものが存在する．ところで $f(x,y)$ は $(a,b)\in R$ で連続だから $f(x_{n_k},y_{n_k}) \to f(a,b)$. したがって $f(a,b)=M$. $M$ の定義から、任意の $(x,y)\in R$ に対して $f(x,y) \le M = f(a,b)$, すなわち $f(x,y)$ は $(a,b)\in R$ で最大値をとる.
$f(R)$ が上に有界であることを示すために、上に非有界として矛盾を導く．上に非有界とすると $f(x_n,y_n)\to\infty$ $(n\to\infty)$ となる $R$ における点列 $\{(x_n,y_n)\}_n \subset R$ が存在する．再び定理 1 から適当な部分列 $\{(x_{n_k},y_{n_k})\}_k$ と点 $(a,b)\in R$ で $(x_{n_k},y_{n_k}) \to (a,b)$ $(k\to\infty)$ となるものが存在する．$f(x,y)$ は $(a,b)\in R$ で連続だから $f(x_{n_k},y_{n_k}) \to f(a,b)$. これは $f(x_{n_k},y_{n_k}) \to \infty$ $(k\to\infty)$ に矛盾する.
最小値の存在も同様.

**問 1.3** 関数 $f(x,y) := \sqrt{r^2-x^2-y^2}$ ( ただし $x^2+y^2<r^2$) の偏微分 $f_x$, $f_y$ を計算せよ.

**解説** $z = r^2-x^2-y^2$ とおく．$f_x$ を計算する．このときは $y$ は定数とする．合成関数の微分公式から

$$f_x = \frac{d\sqrt{z}}{dz}\ \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}z^{-1/2}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}.$$

同様に $f_y = -y/\sqrt{r^2-x^2-y^2}$.