基礎解析 II 演習問題 2 解説　2006 年 10 月 31 日

問 2.1　次の関数 $f(x,y)$ または $f(x,y,z)$ について $\partial^2 f/\partial x^2 + \partial^2 f/\partial y^2$ または $\partial^2 f/\partial x^2 + \partial^2 f/\partial y^2 + \partial^2 f/\partial z^2$ を計算せよ．

$$(1)\quad e^{ax-by}\cos(bx+ay) \qquad (2)\quad \log(x^2+y^2) \qquad (3)\quad \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

解説　(1)　$f_x = ae^{ax-by}\cos(bx+ay) - be^{ax-by}\sin(bx+ay)$, $f_{xx} = a^2e^{ax-by}\cos(bx+ay) - 2abe^{ax-by}\sin(bx+ay) - b^2e^{ax-by}\cos(bx+ay) = (a^2-b^2)e^{ax-by}\cos(bx+ay) - 2abe^{ax-by}\sin(bx+ay)$. 同様に
$f_y = -be^{ax-by}\cos(bx+ay) - ae^{ax-by}\sin(bx+ay)$, $f_{yy} = b^2e^{ax-by}\cos(bx+ay) + 2abe^{ax-by}\sin(bx+ay) - a^2e^{ax-by}\cos(bx+ay) = (b^2-a^2)e^{ax-by}\cos(bx+ay) + 2abe^{ax-by}\sin(bx+ay)$. よって $f_{xx}+f_{yy}=0$.
(2)

$$f_x = \frac{2x}{x^2+y^2},\ f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2)-2x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2x^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2},\ f_y = \frac{2y}{x^2+y^2},\ f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2)-2y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

よって $f_{xx}+f_{yy}=0$.
(3)　$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とおく．このとき $r_x = (1/2)(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}(2x) = x/r$, 同様に $r_y = y/r$, $r_z = z/r$. これを用いて

$$f_x = -\frac{1}{r^2}r_x = -\frac{x}{r^3},\quad f_{xx} = -\frac{r^3 - x(3r^2)r_x}{r^6} = -\frac{r^3 - x(3r^2)(x/r)}{r^6} = -\frac{r^3-3rx^2}{r^6}.$$

同様に $f_{yy} = -(r^3-3ry^2)/r^6$, $f_{zz} = -(r^3-3rz^2)/r^6$. よって $f_{xx}+f_{yy}+f_{zz} = -(3r^3-3r(x^2+y^2+z^2))/r^6 = -(3r^3-3r^3)/r^6 = 0$.

注意.　$f_{xx}+f_{yy}=0$ とか $f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=0$ を満たす関数 $f(x,y)$ や $f(x,y,z)$ を **調和関数** (harmonic function) をいう．

問 2.2　(1)　$z=z(x,y)$ とする．$x=u\cos\alpha - v\sin\alpha$, $y=u\sin\alpha+v\cos\alpha$ のとき z_u, z_v を z_x, z_y, α を用いて表し，$(z_u)^2+(z_v)^2$ を計算せよ．
(2)　$z=z(x,y)$ とする．$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$　$(r>0, \theta\in\mathbf{R})$ のとき z_r, z_θ を z_x, z_y, r, θ を用いて表し，$(z_r)^2+(z_\theta)^2/r^2$ を計算せよ．

解説　(1)　$z_u = z_x x_u + z_v v_u = z_x\cos\alpha + z_y\sin\alpha$, $z_v = z_x x_v + z_y y_v = -z_x\sin\alpha + z_y\cos\alpha$. よって

$$(z_u)^2+(z_v)^2 = (z_x\cos\alpha+z_y\sin\alpha)^2 + +(-z_x\sin\alpha+z_y\cos\alpha)^2 = \ldots = (z_x)^2+(z_y)^2.$$

(2)　$z_r = z_x x_r + z_y y_r = z_x\cos\theta + z_y\sin\theta$, $z_\theta = z_x x_\theta + z_y y_\theta = -z_x r\sin\theta + z_y r\cos\theta$. よって

$$(z_r)^2 + \frac{1}{r^2}(z_\theta)^2 = (z_x\cos\theta+z_y\sin\theta)^2 + \frac{1}{r^2}(-z_x r\sin\theta + z_y r\cos\theta)^2 = \ldots = (z_x)^2+(z_y)^2.$$

問 2.3 次の関数 $f(x,y)$ に対して $f(x,y)=0$ から決まる関数 $y=y(x)$ の微分 dy/dx を x,y を用いて表せ (ただし (x,y) は $f(x,y)=0$ を満たすとする).

$$(1)\quad y - xe^y - 1 \qquad (2)\quad x^2y^3+y-x$$

解答　(1) $y' = -f_x/f_y = -(-e^y)/(1-xe^y) = e^y/(1-xe^y)$. $f(x,y)=0$ から $xe^y = y-1$ であるから $y' = e^y/(2-y)$ と表してもよい．このように y' を $f(x,y)=0$ を満たす (x,y) を用いて表す仕方は無数にある．
(2)　$y' = -f_x/f_y = -(2xy^3-1)/(3x^2y^2+1) = (1-2xy^3)/(1+3x^2y^2)$.

注意　教科書 p.31 の下から 6 行目以下の 4 行は次のように変更する．
陰関数定理は $k+n$ 変数の n 個の関数の連立方程式

$$f_1(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1},\ldots,x_{k+n}) = 0,\quad \ldots,\quad f_n(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1},\ldots,x_{k+n}) = 0$$

の場合に拡張される．適当な仮定の下で，その中の n 個の変数，例えば $x_{k+1},\ldots,x_{k+n}$ が残りの変数 $x_1,\ldots,x_k$ の n 個の関数として書けるのである．

$$x_{k+1} = g_1(x_1,\ldots,x_k),\quad \ldots,\quad x_{k+n} = g_n(x_1,\ldots,x_k)$$