基礎解析 II 演習問題 4 解説　2006 年 11 月 28 日

問 4.1　(1)　$f(x,y)=\sin(x+y^2)+\sqrt{x}$ について $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$ を求めよ.
(2)　$f(x,y)=1/\sqrt{1-2xy+y^2}$ について

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big((1-x^2)\frac{\partial f}{\partial x}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(y^2\frac{\partial f}{\partial y}\Big)$$

を求めよ.

解説　(1)　まず $f_x=\cos(x+y^2)+(1/2)x^{-1/2}, f_y=2y\cos(x+y^2)$. これより

$$f_{xx}=-\sin(x+y^2)-\frac{1}{4}x^{-3/2},\quad f_{xy}=-2y\sin(x+y^2),\quad f_{yy}=-4y^2\sin(x+y^2)+2\cos(x+y^2).$$

(2)　$f_x=(-1/2)(1-2xy+y^2)^{-3/2}(-2y)=y(1-2xy+y^2)^{-3/2}$ より

$$\begin{aligned}\big((1-x^2)f_x\big)_x &= \big((1-x^2)y(1-2xy+y^2)^{-3/2}\big)_x\\ &= -2xy(1-2xy+y^2)^{-3/2}+(1-x^2)y(-3/2)(1-2xy+y^2)^{-5/2}(-2y)\\ &= -2xy(1-2xy+y^2)^{-3/2}+3(1-x^2)y^2(1-2xy+y^2)^{-5/2}.\end{aligned}$$

また $f_y=(-1/2)(1-2xy+y^2)^{-3/2}(-2x+2y)=(x-y)(1-2xy+y^2)^{-3/2}$ より

$$\begin{aligned}\big(y^2f_y\big)_y &= \big(y^2(x-y)(1-2xy+y^2)^{-3/2}\big)_y\\ &= (2xy-3y^2)(1-2xy+y^2)^{-3/2}+y^2(x-y)(-3/2)(1-2xy+y^2)^{-5/2}(-2x+2y)\\ &= (2xy-3y^2)(1-2xy+y^2)^{-3/2}+3y^2(x-y)^2(1-2xy+y^2)^{-5/2}.\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}&\big((1-x^2)f_x\big)_x+\big(y^2f_y\big)_y\\ &=-3y^2(1-2xy+y^2)^{-3/2}+\Big(3(1-x^2)y^2+3y^2(x-y)^2\Big)(1-2xy+y^2)^{-5/2}\\ &=3y^2(1-2xy+y^2)^{-5/2}\Big(-(1-2xy+y^2)+(1-x^2)+(x-y)^2\Big)=0.\end{aligned}$$

問 4.2　(1)　任意の関数 $f(z), g(z)$ と定数 a,b に対して $w:=xf(ax+by)+yg(ax+by)$ は

$$b^2w_{xx}-2abw_{xy}+a^2w_{yy}=0$$

を満たすことを示せ.
(2)　$f(x,y):=(ax+by)/(cx+dy)$ $(a,b,c,d$ は $ad-bc\neq 0$ を満たす定数$)$ は

$$xf_x+yf_y=0$$

を満たすことをしめせ.

解説　(1)

$$\begin{aligned}w_x &= f+xf'a+yg'a=f+axf'+ayg',\\ w_y &= xf'b+g+yg'b=g+bxf'+byg',\\ w_{xx} &= f'a+(af'+axf''a)+ayg''a=2af'+a^2xf''+a^2yg'',\\ w_{xy} &= f'b+axf''b+(ag'+ayg''b)=bf'+ag'+abxf''+abyg'',\\ w_{yy} &= g'b+bxf''b+(bg'+byg''b)=2bg'+b^2xf''+b^2yg''.\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}&b^2w_{xx}-2abw_{xy}+a^2w_{yy}\\ &=b^2(2af'+a^2xf''+a^2yg'')-2ab(bf'+ag'+abxf''+abyg'')+a^2(2bg'+b^2xf''+b^2yg'')=0.\end{aligned}$$

(2)

$$f_x=\frac{a(cx+dy)-c(ax+by)}{(cx+dy)^2}=\frac{(ad-bc)y}{(cx+dy)^2},\quad f_y=\frac{b(cx+dy)-d(ax+by)}{(cx+dy)^2}=\frac{-(ad-bc)x}{(cx+dy)^2}.$$

これより $xf_x+yf_y=0$.

問 4.3 $w_{xx}-w_{yy}=0$ であるとき, 定数 a,b を適当にとって $u=x+ay, v=x+by$ とおくことにより, $w_{uv}=0$ とすることが出来ることを示せ.

解説

$$w_x=w_uu_x+w_vv_x=w_u+w_v,\quad w_y=w_uu_y+w_vv_y=aw_u+bw_v$$

より

$$\begin{aligned} w_{xx} &= \Big((w_u)_uu_x+(w_u)_vv_x\Big)+\Big((w_v)_uu_x+(w_v)_vv_x\Big)=w_{uu}+2w_{uv}+w_{vv},\\ w_{yy} &= a\Big((w_u)_uu_y+(w_u)_vv_y\Big)+b\Big((w_v)_uu_y+(w_v)_vv_y\Big)=a^2w_{uu}+2abw_{uv}+b^2w_{vv}. \end{aligned}$$

したがって

$$w_{xx}-w_{yy}=(1-a^2)w_{uu}+2(1-ab)w_{uv}+(1-b^2)w_{vv}.$$

よって $a^2=1, b^2=1, ab\neq 1$ となるように、例えば $a=1, b=-1$ に選べば $w_{xx}-w_{yy}=0$ と $w_{uv}=0$ とは同値となる.

---

11 月 21 日の講義における演習問題の解説

問題 $f_{xx}+f_{yy}$ を極座標 (r,θ) で表せ. ただし $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$.

解説. $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta=\tan^{-1}(y/x)$ より

$$r_x=\frac{x}{r},\quad r_y=\frac{y}{r},\quad \theta_x=\frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{-y}{x^2}=\frac{-y}{r^2},\quad \theta_y=\frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{1}{x}=\frac{x}{r^2}.$$

さらに

$$r_{xx}=\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3},\quad r_{yy}=\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3},\quad \theta_{xx}=2\frac{y}{r^3}r_x=\frac{2xy}{r^4},\quad \theta_{yy}=-2\frac{x}{r^3}r_y=-\frac{2xy}{r^4}.$$

連鎖律 (chain rule)(教科書 p.17) から

$$f_x=f_rr_x+f_\theta\theta_x,\quad f_y=f_rr_y+f_\theta\theta_y.$$

よって

$$\begin{aligned} f_{xx} &= (f_{rr}r_x+f_{r\theta}\theta_x)r_x+f_rr_{xx}+(f_{\theta r}r_x+f_{\theta\theta}\theta_x)\theta_x+f_\theta\theta_{xx}\\ &= f_{rr}(r_x)^2+2f_{r\theta}r_x\theta_x+f_{\theta\theta}(\theta_x)^2+f_rr_{xx}+f_\theta\theta_{xx}\\ f_{yy} &= (f_{rr}r_y+f_{r\theta}\theta_y)r_y+f_rr_{yy}+(f_{\theta r}r_y+f_{\theta\theta}\theta_y)\theta_y+f_\theta\theta_{yy}\\ &= f_{rr}(r_y)^2+2f_{r\theta}r_y\theta_y+f_{\theta\theta}(\theta_y)^2+f_rr_{yy}+f_\theta\theta_{yy}. \end{aligned}$$

したがって

$$f_{xx}+f_{yy}=Af_{rr}+2Bf_{r\theta}+Cf_{\theta\theta}+Df_r+Ef_\theta$$

とおくと

$$\begin{aligned} A &= (r_x)^2+(r_y)^2=\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=1,\quad B=r_x\theta_x+r_y\theta_y=\frac{x}{r}\frac{(-y)}{r^2}+\frac{y}{r}\frac{x}{r^2}=0,\quad C=(\theta_x)^2+(\theta_y)^2=\frac{y^2}{r^2}+\frac{x^2}{r^2}=1,\\ D &= r_{xx}+r_{yy}=\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^2}+\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^2}=\frac{1}{r},\quad E=\theta_{xx}+\theta_{yy}=\frac{2xy}{r^4}-\frac{2xy}{r^4}=0. \end{aligned}$$

以上から

$$f_{xx}+f_{yy}=f_{rr}+\frac{1}{r^2}f_{\theta\theta}+\frac{1}{r}f_r.$$