基礎解析 II 演習問題 5 解説　2006 年 12 月 19 日

問 5.1　次の重積分を計算せよ (累次積分).

(1) $\displaystyle\int_D \sin(x+y)dxdy \quad (D:\ x,y \geq 0,\ x+y \leq \pi/2)$　　(2) $\displaystyle\int\int_D xdxdy \quad (D:\ \sqrt{x}+\sqrt{y} \leq 1)$

(3) $\displaystyle\int_D x^2y^2dxdy \quad (D:\ |x|+|y| \leq 1)$　　(4) $\displaystyle\int_D \sqrt{xy-x^2}dxdy \quad (D:\ 0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 2x)$

解説　積分値を I とおく. いずれも累次積分で求める.

(1)

$$I = \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\pi/2-x} \sin(x+y)dy = \int_0^{\pi/2} dx\,[-\cos(x+y)]_{y=0}^{y=\pi/2-x} = \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = 1.$$

(2)

$$\int\int_D xdxdy = \int_0^1 dx \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} xdy = \int_0^1 x(1-\sqrt{x})^2dx = \int_0^1 (x^2-2x^{3/2}+x)dx = 1/30.$$

(3)

$$I = 4\int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2y^2dy = 4\int_0^1 dx\,\left[x^2y^3/3\right]_0^{1-x} = 4\int_0^1 x^2(1-x)^3/3\,dx = 1/45.$$

(4)

$$\int\int_D \sqrt{xy-x^2}dxdy = \int_0^1 dx \int_x^{2x} \sqrt{x}\sqrt{y-x}dy = \int_0^1 dx[\sqrt{x}(2/3)(y-x)^{3/2}]_{y=x}^{y=2x} = \int_0^1 (2/3)x^2dx = 2/9.$$

問 5.2　次の重積分を計算せよ (変数変換, 広義積分).

(1) $\displaystyle\int_{x^2+y^2\leq 1} e^{x^2+y^2}dxdy$　　(2) $\displaystyle\int_{x^2/a^2+y^2/b^2\leq 1} (x^2+y^2)dxdy$

(3) $\displaystyle\int_{x^2+y^2+z^2\leq 1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}dxdydz$　　(4) $\displaystyle\int_{x,y\geq 0} \frac{1}{(ax+by+c)^\alpha}dxdy \quad (\alpha > 2,\ a,b,c > 0)$

解説　積分値を I とおく.

(1) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと，$dxdy = rdrd\theta$ であるので

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 e^{r^2}r\ dr = \int_0^{2\pi} [e^{r^2}/2]_{r=0}^{r=1} = \pi(e-1).$$

(2) $x = ar\cos\theta, y = br\sin\theta$ とおくと，$dxdy = abrdrd\theta$ であるので

$$I = ab\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr\,(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)r^3 = (ab/4)\int_0^{2\pi} (a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)d\theta = \pi ab(a^2+b^2)/4.$$

(3) $x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta$ とおくと，　$dxdydz = r^2\sin\theta\ dr\ d\theta\ d\varphi$ であるので

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta\ \frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{1-r^2}} = 4\pi\int_0^1 dr\ \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}} \\ &= 4\pi\left([-r\sqrt{1-r^2}]_0^1 + \int_0^1 \sqrt{1-r^2}dr\right) = 4\pi[2^{-1}(r\sqrt{1-r^2}+\sin^{-1} r)]_0^1 = \pi^2. \end{aligned}$$

ここで、第 3 の等号では部分積分を、第 4 の等号では

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}\Big(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\sin^{-1}(x/a)\Big)$$

を用いた。

(4) $K_n:\ 0 \le x \le n,\ 0 \le y \le n$ とすると $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $D:\ x \ge 0,\ y \ge 0$ の近似列である．
$I_n = \int_{K_n} (ax+by+c)^{-\alpha} dxdy$ とすると，

$$\begin{aligned}
I_n: &= \int_0^n dy \int_0^n (ax+by+c)^{-\alpha} dx = \int_0^n dy \frac{1}{(1-\alpha)a} [(ax+by+c)^{1-\alpha}]_{x=0}^{x=n} \\
&= \frac{1}{(1-\alpha)a} \int_0^n \big((bx+c+an)^{1-\alpha} - (by+c)^{1-\alpha}\big) dy \\
&= \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)ab} [(by+c+an)^{2-\alpha}]_{y=0}^{y=n} - \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)ab} [(by+c)^{2-\alpha}]_{y=0}^{y=n} \\
&= \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)ab} \big((an+bn+c)^{2-\alpha} - (an+c)^{2-\alpha} - (bn+c)^{2-\alpha} + c^{2-\alpha}\big).
\end{aligned}$$

ここで $\beta < 0$ のとき $\lim_{z\to\infty} z^{\beta} = 0$ であることを用いると

$$\int_D \frac{1}{(ax+by+c)^{\alpha}} dxdy = \lim_{n\to\infty} I_n = \frac{c^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)ab}.$$

馴れてくると次のように計算することがある．

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} (ax+by+c)^{-\alpha} dx = \int_0^{\infty} \Big[\frac{1}{(1-\alpha)a}(ax+by+c)^{1-\alpha}\Big]_{x=0}^{x=\infty} \\
&= \int_0^{\infty} \frac{1}{(\alpha-1)a}(by+c)^{1-\alpha} dy = \frac{c^{2-\alpha}}{(\alpha-1)(\alpha-2)ab}.
\end{aligned}$$