基礎解析 II 演習問題 6 解説　2007 年 1 月 9 日

問 6.1　(1) 平面上の図形 D: $\sqrt{x}+\sqrt{y}\le 1$ の面積 $S(D)$ を求めよ.
(2) 空間内の図形 D: $x^2+y^2\le a^2,\ x\ge 0,\ mx\le z\le nx\ (0<m<n)$ の体積 $V(D)$ を求めよ.
(3) 空間内の図形 D: $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le 1$ の体積 $V(D)$ を求めよ.

解説　(1)

$$S(D)=\int_0^1 dx\int_0^{(1-\sqrt{x})^2}dy=\int_0^1(x-2\sqrt{x}+1)dx=1/6.$$

(2)

$$\begin{aligned}V(D)&=\int_0^a dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}dy\int_{mx}^{nx}dz=\int_0^a 2(n-m)x\sqrt{a^2-x^2}dx\\&=2(n-m)[-(a^2-x^2)^{3/2}/3]_0^a=2(n-m)a^3/3.\end{aligned}$$

(3) 変数変換 $\sqrt{x}=u,\sqrt{y}=v,\sqrt{z}=w$ を行うと、xyz-空間内の考えている立体 D は uvw-空間内の立体 $u,v,w\ge 0,u+v+w\le 1$ に写り、$dxdydz=8uvwdudvdw$ であるので

$$V(D)=\int_0^1 du\int_0^{1-u}dv\int_0^{1-u-v}dw\,8uvw=\int_0^1 du\int_0^{1-u}dv\,4uv(1-u-v)^2=\int_0^1 du\,u(1-u)^4/3=1/90.$$

問 6.2　(1) 空間内の曲線 C: $x=a\cos\theta,\ y=a\sin\theta,\ z=h\theta\ (0\le\theta\le 2\pi)$ の長さ $\ell(C)$ を求めよ.
(2) 平面上の曲線 C: $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ の長さ $\ell(C)$ を求めよ.

解説　(1) $\sqrt{(dx/d\theta)^2+(dy/d\theta)^2+(dz/d\theta)^2}=\sqrt{a^2+h^2}$ であるから

$$\ell(C)=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+h^2}d\theta=2\pi\sqrt{a^2+h^2}.$$

(2) この曲線は はパラメータ $0\le t\le 2\pi$ を用いて $x=a\cos^3 t,y=a\sin^3 t$ と表される．よって

$$\ell(C)=\int_0^{2\pi}\sqrt{(dx/dt)^2+(dy/dt)^2}dt=(3a/2)\int_0^{2\pi}|\sin 2t|dt=6a\int_0^{\pi/2}\sin 2tdt=6a.$$

問 6.3　(1) 曲面 $z=\tan^{-1}(y/x)\ (x,y>0)$ の $x^2+y^2=a^2$ の内部にある部分の曲面積 S を求めよ.
(2) 半径 R, 高さ h の円柱面の曲面積 S を求めよ.
(3) 半径 R の球の表面積 S を求めよ.

解説　(1) $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+x^2+y^2}/\sqrt{x^2+y^2}$ であるので、

$$S=\int\int_{x^2+y^2\le a^2,x,y>0}\sqrt{1+x^2+y^2}/\sqrt{x^2+y^2}dxdy.$$

極座標変換 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$ をすると

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^a\sqrt{r^2+1}dr=(\pi/2)\left[(r\sqrt{r^2+1}+\log(r+\sqrt{r^2+1}))/2\right]_{r=0}^{r=a}\\&=(\pi/4)(a\sqrt{a^2+1}+\log(a+\sqrt{a^2+1})).\end{aligned}$$

(2) この円柱面は $x = R\cos\theta, y = R\sin\theta, z = z,\ \ (0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le z \le h)$ と表せる.

$$E = (x_\theta)^2 + (y_\theta)^2 + (z_\theta)^2 = R^2,\quad F = x_\theta x_z + y_\theta y_z + z_\theta z_z = 0,\quad G = (x_z)^2 + (y_z)^2 + (z_z)^2 = 1$$

であるので $\sqrt{EG - F^2} = R$. よって

$$S = \int_{0\le\theta\le 2\pi, 0\le z\le h} \sqrt{EG - F^2} d\theta dz = R\int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi Rh.$$

(3) この球面は $x = R\cos\varphi\sin\theta, y = R\sin\varphi\sin\theta, z = R\cos\theta\ \ (0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi)$ と表せる.

$$\begin{aligned} E &= (x_\theta)^2 + (y_\theta)^2 + (z_\theta)^2 = R^2\cos^2\varphi\cos^2\theta + R^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + R^2\sin^2\theta = R^2, \\ F &= x_\theta x_\varphi + y_\theta y_\varphi + z_\theta z_\varphi = R\cos\varphi\cos\theta(-R\sin\varphi\sin\theta) + R\sin\varphi\cos\theta(R\cos\varphi\sin\theta) = 0, \\ G &= (x_\varphi)^2 + (y_\varphi)^2 + (z_\varphi)^2 = R^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + R^2\cos^2\varphi\sin^\theta = R^2\sin^2\theta. \end{aligned}$$

よって $\sqrt{EG - F^2} = R^2\sin\theta$. したがって

$$S = \int_{0\le\theta\le\pi, 0\le\varphi\le 2\pi} R^2\sin\theta\, d\theta d\varphi = 2\pi R^2 \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta = 4\pi R^2.$$