基礎解析 II 演習問題 7 解説　2007 年 1 月 23 日

問 7.1　(1)　平面領域の場合のグリーンの定理 (教科書 $p.184, (2.3)$)

$$\int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_R \Big(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\Big) dxdy$$

(γ は平面上の閉曲線，R は γ で囲まれる有界領域，ただし γ は R を左に見て進む向き) を $P(x,y) = -y, Q(x,y) = x$ の場合に適用すると

$$(*) \qquad \int_\gamma -ydx + xdy = 2S(R)$$

が成り立つことを示せ．ここで $S(R)$ は R の面積.

(2)　$(*)$ が成り立つことを R が 4 点 $(a,b),(a',b),(a',b'),(a,b')$ (ただし $a < a', b < b'$) を頂点とする長方形の場合と，(a,b) を中心とする半径 r の円板の場合に確かめよ.

解説　(1) $P(x,y) = -y, Q(x,y) = x$ の場合，グリーンの定理の右辺は

$$\int_R (-P_y + Q_x)dxdy = \int_R (-(-1)+1)dxdy = 2\int_R dxdy = 2S(R)$$

となるので (*) が示された.

<u>(2) R が長方形の場合:</u> γ を向きのある 4 線分 $\gamma_1 := \overline{(a,b)(a',b)}, \gamma_2 := \overline{(a',b)(a',b')}, \gamma_3 := \overline{(a',b')(a,b')}, \gamma_4 := \overline{(a,b')(a,b)}$ に分ける．各 γ_k は次のようにパラメータ表示される.

$$\begin{aligned}
\gamma_1 : \quad & x = t,\ y = b,\ \ (a \le t \le a'), \quad \gamma_2 : x = a',\ y = t,\ \ (b \le t \le b'),\\
\gamma_3 : \quad & x = a + a' - t,\ y = b',\ \ (a \le t \le a'), \quad \gamma_4 : x = a,\ y = b + b' - t,\ \ (b \le t \le b').
\end{aligned}$$

$I_k := \int_{\gamma_k} -ydx + xdy$ とおいて各 I_k を計算する.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_a^{a'} (-b)dt = -(a'-a)b, \qquad I_2 = \int_b^{b'} (a')dt = a'(b'-b),\\
I_3 &= \int_a^{a'} (-b'(-1))dt = b'(a'-a), \qquad I_4 = \int_b^{b'} (a(-1))dt = -a(b'-b).
\end{aligned}$$

従って (*) の左辺 $I_1 + I_2 + I_3 + I_4$ は $2(a'-a)(b'-b)$ となり，これは長方形 R の面積の 2 倍である.

R が円板の場合: γ は $x = r\cos t + a,\ y = r\sin t + b\ \ (0 \le t \le 2\pi)$ とパラメータ表示される．従って (*) の左辺は

$$\int_0^{2\pi} \big(-(r\sin t + b)(-r\sin t) + (r\cos t + a)(r\cos t)\big)dt = \int_0^{2\pi} r^2 dt + \int_0^{2\pi} (br\sin t + ar\cos t)dt = 2\pi r^2$$

となり，これは円板 R の面積の 2 倍である.