

—計算機と数学—計算機を用いた可積分系の方法による 平均曲率一定曲面の実現

ウェイン ラスマン

平成 18 年 10 月 24 日

本稿では、平均曲率一定曲面の研究に使われる、計算機を用いたグラフィックスの作成と数値的な近似法について解説する。数学の他の分野に比べ、曲面論の研究においては、計算機にグラフィックスを描かせることによって曲面の幾何学的性質を実際に目で見て理解できることから、計算機は非常に有用である。しかし、より本質的には、計算機には不可能な無限次元の問題を、計算機の得意とする有限次元の問題に置き換えることであり、それは曲面論に限らず数学の多くの分野に応用できる概念である。

アプローチ 1 例えば、ある初期値を持つ任意の 1 階常微分方程式を考える。もし、解が具体的に書き下せないときは、解がどのように振舞うかを知るために、取り敢えず Euler の折れ線法や Runge-Kutta の方法などを用いて解を数値的に近似することがある。このとき、知りたいことは近似解ではないが、滑らかな本当の解を理解するための手段としてこれらの方法を用いている。

これらの方法には、対応する差分方程式があり、離散的な関数のなすベクトル空間（解ではない離散的な関数も含む）は有限次元であるから、これらの方法は「有限次元」の問題と考えることができる。これに対し、微分方程式に対応する滑らかな関数のなすベクトル空間（解ではない滑らかな関数も含む）は無次元であるから、微分方程式の解を求める問題は「無限次元」の問題と考えることができる。このような記法は標準的ではなく、論文等にも使われないが、会話中にこのような表現を用いる幾何学者もいる。

アプローチ 2 一方、微分方程式にも離散的な解の近似方法にも興味が無く、微分方程式のある性質（興味の対象となる性質）を受け継ぐような差分方程式に興味を持っている場合、最も興味深いのは「有限次元化」された差分方程式そのものであり、微分方程式自体は必要ないか、もしくは差分方程式の解がもとの微分方程式の解に収束することは付随的なことである。

両者は興味の対象が全く異なるが、どちらも明らかに計算機の恩恵を強く受けている。現代の曲面論においては、どちらのアプローチもよく使われているが、多くの場合、現れるのは常微分方程式ではなく偏微分方程式である。アプローチ 2（滑らかな対象から離散的な類似物を求めること）は、近年の数学、特に解析学や幾何学において頻繁に現れるようになった。このことから自然に、（滑らか

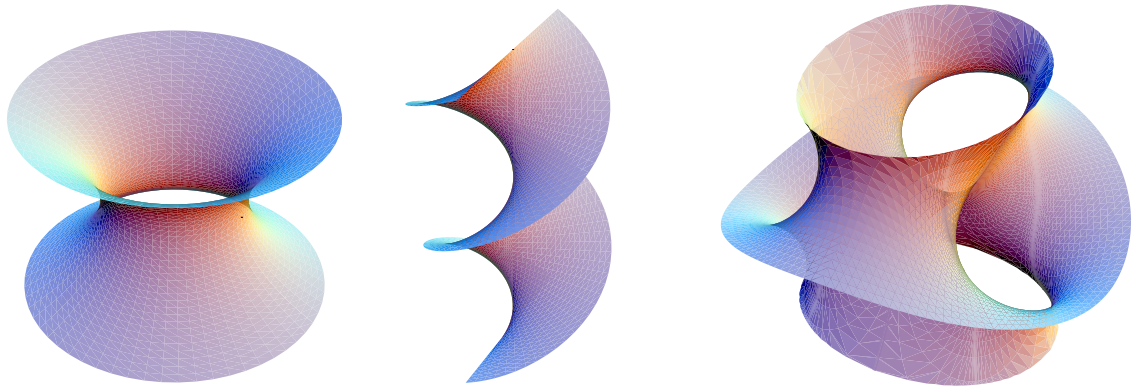


図 1: \mathbf{R}^3 内の極小曲面. 左から懸垂面, 常螺旋面, Costa 曲面.

な) 極小曲面や平均曲率一定曲面から, その離散的な類似物を求める研究が始められた. しかし, 滑らかな曲面の, どの性質に着目するかによって, 得られる離散的な曲面は異なる.

数値的に近似する以外に構成方法が見つからないような曲面の場合, アプローチ 1 は使われる. 以下に典型的な例を挙げる.

Costa 曲面: 3次元 Euclid 空間 \mathbf{R}^3 内の極小曲面 $M \subset \mathbf{R}^3$ は, 各点 $p \in M$ に対してある p の近傍 $U \subset M$ が存在して, U はその境界 ∂U を固定した曲面の中で (唯一つ) 最小の面積をもつ曲面である. 境界を固定した, 中に空気を含まない石鹸膜は, その境界に対して (局所的に) 最小の面積をもつから, 極小曲面は, 石鹸膜のモデルになっている. (幾何学者は通常, 極小曲面を曲面の各点 $p \in M$ で主曲率の大きさが一致し, 符号が逆になる曲面として定める. この定義は上の定義と同値であるが, 我々は「極小」という言葉の由来を示すために上の定義を採用した.) 一番単純な例は \mathbf{R}^3 内の平面である. 他の古典的な例を 2 つ挙げる. 1) 懸垂線を回転して得られる懸垂面という曲面. これは \mathbf{R} を実数として

$$\{(\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u) \in \mathbf{R}^3 \mid u \in \mathbf{R}, v \in [0, 2\pi)\}$$

で与えられる. 2) 線織面として得られる常螺旋面. これは

$$\{(\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, v) \in \mathbf{R}^3 \mid u, v \in \mathbf{R}\}$$

で与えられる. 有名な Weierstrass の表現公式によると, 全ての極小曲面は (局所的には) Riemann 面上の有理型関数 f と g の対から, 線積分

$$\operatorname{Re} \int_{z_0}^z (1 - g^2, i + ig^2, 2g) f dz, \quad i = \sqrt{-1}$$

を用いて構成される. ただし, z は Riemann 面の局所座標とする.

\mathbf{R}^3 内の完備な埋め込まれた極小曲面で有限型位相をもつものは, 上述の 3 種類しか存在しないと長い間予想されていた. しかし, Costa は 1984 年に, 種数 1 で 3 つのエンド

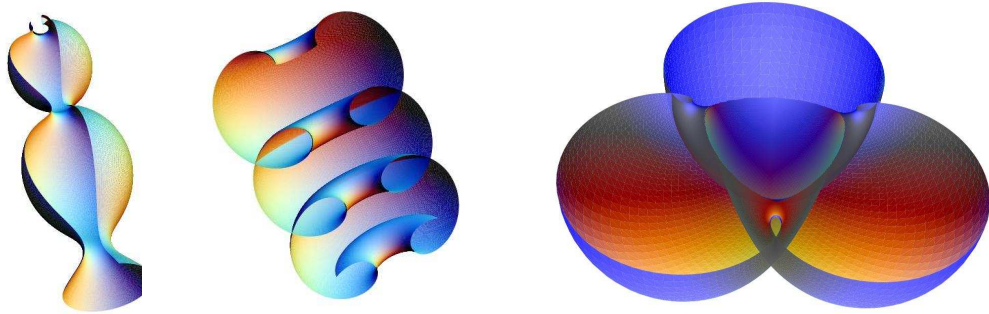


図 2: \mathbb{R}^3 内の CMC 曲面の一部. 左から, Delaunay unduloid, Delaunay nodoid, Wente 輪環面. 左の 2 つは回転面である. (グラフィックスは下瀬浩一氏による.)

をもつ完備な極小曲面を発見した [4]. この曲面は, \mathbb{R}^3 のあるコンパクト集合の外側では埋め込まれていたことから, この予想の反例になっている可能性があると考えられた. そして 1985 年, D. Hoffman と Meeks によってこの曲面は実際に埋め込まれており, この予想の反例になっていることが証明された [8]. D. Hoffman と Meeks は最初に計算機を用いて Costa 曲面のグラフィックスを作成し, その結果この曲面が高い対称性をもっていることが考察され, その性質を数学的に証明することで, 曲面が埋め込まれていることの証明にも成功した. 彼らは最終的に数値計算と無関係な証明を与えたが, 数値計算は証明の発見に非常に役立った. 彼らは最初に述べたアプローチ 1 を使い, 「有限次元」の近似は単なる道具として用いており, そこから数学的な証明のアイデアを得た.

Costa 曲面は以下のデータを Weierstrass 表現公式に適用することで得られる.

Riemann 面: $\Sigma = \{(z, w) \in (\mathbb{C} \cup \{\infty\})^2 \mid w^2 = z(z^2 - 1)\} \setminus \{(-1, 0), (1, 0), (\infty, \infty)\}$,

$$g = B/w, \quad f = w/(z^2 - 1).$$

ただし, B は

$$B = \sqrt{2 \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t^2} \right)^{1/2} dt \bigg/ \int_0^1 \frac{dt}{t(1-t^2)^{1/2}}}$$

で与えられる定数である. このデータから, どのように数値計算が行われたのかは, 想像に難くない.

アプローチ 1 は, 計算機が現れる以前から既に使われていた. 次にそのような例を挙げる.

Wente 輪環面: 平均曲率一定 (constant mean curvature, 以下 CMC と略記) 曲面は極小曲面と同様に定義できるが, 体積に関する制限が加わる. CMC 曲面 $M \subset \mathbb{R}^3$ は, 各点 $p \in M$ に対してある p の近傍 $U \subset M$ が存在して, U はその境界 ∂U を体積を固定した曲面の中で (唯 1 つ) 最小の面積をもつ曲面である. ここで, 有界かつ単連結な, 2 つの同

ソフトウェア	ウェブサイト
Surface Evolver	K. Brakke, www.susqu.edu/brakke または Knoppix/Math, www.knoppix-math.org
JavaView	K. Polthier, www.javaview.de
CMCLab, Java version	Tokyo Metro. Univ., tmugs.math.metro-u.ac.jp
CMCLab, Linux version	N. Schmitt, www.gang.umass.edu または Knoppix/Math, www.knoppix-math.org

表 1: 関連する有用なフリーウェア.

じ境界 $\partial U = \partial \hat{U}$ をもつ曲面 U と \hat{U} が同じ体積をもつとは、 U から \hat{U} への連続的な変形で、曲面の片側の体積が変わらないものが存在することとする。中に空気を含む石鹸膜は、同じ体積をもつ曲面のうち最小の面積をもつから、CMC 曲面も極小曲面と同様に石鹸膜のモデルになっている。(幾何学者は通常、CMC 曲面を曲面の各点 $p \in M$ で主曲率の平均、即ち平均曲率が一定な曲面として定める。この定義は上の定義と同値である。極小曲面の時とは逆に、「CMC」という名前はこの定義から採用した。) CMC 曲面の一番単純な例は、球面や円柱である。非自明な例としては、Delaunay 回転面が知られている。この曲面は以下の性質を満たす Jacobi 楕円関数 $v(x)$ とそれによる第 3 種楕円積分

$$\int_0^x \frac{4st}{4st + v^2(\rho)} d\rho$$

で具体的に径数付けられる。即ち、

$$(v')^2 = -(v^2 - 4s^2)(v^2 - 4t^2), \quad v(0) = 2|t|.$$

ただし、 $s, t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $s \neq t$, $s + t = 1/2$.

Hopf は、 \mathbf{R}^3 内の境界のないコンパクトな CMC 曲面が球面に限るかどうかを考察した [10]。(彼は単に考察しただけで、予想はしていない。) Hopf 自身は、曲面が単連結なときは球面に限ることを証明した。Alexandrov は、2 階の楕円型微分方程式の最大値原理を用いて、曲面が埋め込まれているときは球面に限ることを証明した。ところが Wente は、種数 1 で埋め込まれていない、境界のないコンパクトな CMC 曲面を発見した。これらの輪環面は Delaunay 曲面と同様に、楕円関数と積分を用いて具体的に径数付けることができる。

しかし、今から 100 年以上前、Enneper の学生であった Voretzsch は、Wente 輪環面を含む曲面のクラスを局所的にのみではあるが既に考えていた。彼の論文に掲載されているデータの表から明らかに、彼は (勿論計算機を使わずに) 曲面の近似値を計算していたことが分かる [15]。Voretzsch は 1 つの曲率線の族が平面に入っているという仮定を付けることで楕円関数を数値的に近似することに問題を帰着させた。Wente 輪環面もこの仮定を満たすが、そのことは後に Abresch によって指摘された [1]。Voretzsch はこのデータを用いて石膏で曲面のモデルを作成したが、そのモデルは後に消失してしまった。近年、ベルリン工科大学の修士課程の学生によって (Mathematica を用いて) Voretzsch のデータには誤差が非常に小さいことが確認された [17]。現在、ベルリン工科大学では 3 次元プリンターを用いて Voretzsch の石膏モデルを再現する計画が進められている。

もし, Voretzsch が曲面の大域的な性質, 特に曲面がコンパクトに閉じるか, という問題も考えていたならば, Wente 輪環面の存在は Hopf が上述の考察をするよりはるか前から知られていたかもしれない.

一方, アプローチ 2 を適用するためには, 前述したように, 滑らかな CMC 曲面のどの性質に着目して, 離散的な CMC 曲面を構成するのかを決めなければならない. 着目する性質によっては, 本質的に異なる曲面が構成される.

1 つの選択肢として, 上述の定義に従い, 体積を固定した曲面の変分に関して局所的に面積最小となるものを離散的な CMC 曲面と定義する. ただし, 離散的な曲面は三角形から構成されるものとし, その変分を (単体構造を保存したまま) 曲面の頂点を連続的に動かすことと定める. 即ち, 三角形の辺同士をのり付けして曲面を作り, その任意の 1 つの頂点を体積を固定したまま連続的に動かしたときに, 常に面積が大きくなる時, その曲面を離散的な CMC 曲面と呼ぶことにする. この定義は Polthier 等が主に採用している [13], [14]. また, Brakke によって開発された Surface Evolver というソフトウェアはこの定義に基づいて離散的な CMC 曲面を数値的に構成することができる. このソフトウェアは, 面積汎関数だけでなく, 他の汎関数に対しても, その最小値を計算することができ, 非常に使いやすい.

しかし, 最近多く使われている定義は, CMC 曲面の Gauss 方程式がもつ性質に着目している. 特別な等温座標系を用いたとき, 滑らかな CMC 曲面の局所的な存在性は, Gauss 方程式の解 u の存在性と一致し, Gauss 方程式は sinh-Gordon 方程式

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} u + \sinh u = 0$$

となる. ただし, z は Riemann 面の局所座標, u は Riemann 面上の実数値関数とする.

実際には, 曲面の臍点 (2 つの主曲率が一致する点) では Gauss 方程式は sinh-Gordon 方程式にならない. 何故ならば, 一般に Gauss 方程式は

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} u - \frac{1}{2} Q \bar{Q} e^{-u} + 2H^2 e^u = 0$$

と表されるからである. ただし, H は平均曲率 (定数), $Q = Q(z)$ は臍点で零点を持つはめ込みからきまる正則関数である. しかし, 球面以外の CMC 曲面では臍点は孤立点であるから, その点以外では, 適当な座標変換と相似変換 (homothety) によって Gauss 方程式は上の sinh-Gordon 方程式に変換される. 以下, 簡単のため, 曲面は臍点を持たないと仮定する. このとき, CMC 曲面は局所的に sinh-Gordon 方程式の解と対応している.

従って, この sinh-Gordon 方程式という可積分系の方程式の離散化によって, 離散的な CMC 曲面の定義を得る. このとき, 曲面の面積最小性という性質は失われるので, 変分を考える必要は無くなり, 曲面は三角形ではなく四角形から構成されていると考えてもよい (この場合 4 つの頂点が 1 つの平面に乗るため, 前述のように頂点を自由に動かすことができない). このような方法で曲面を離散化したのは, おそらく Wunderlich が最初であると思われる [18]. 後に, Bobenko と Pinkall を中心とするベルリン工科大学の幾何グループが, Wunderlich の結果を再発見しさらにこの分野を発展させた.

CMC 曲面の離散化としては, 一見面積最小性に着目した方が, 可積分系とのつながりに着目するより自然に思える. 何故ならば, 前者は滑らかな CMC 曲面の本来の定義に着目しているのに対し,

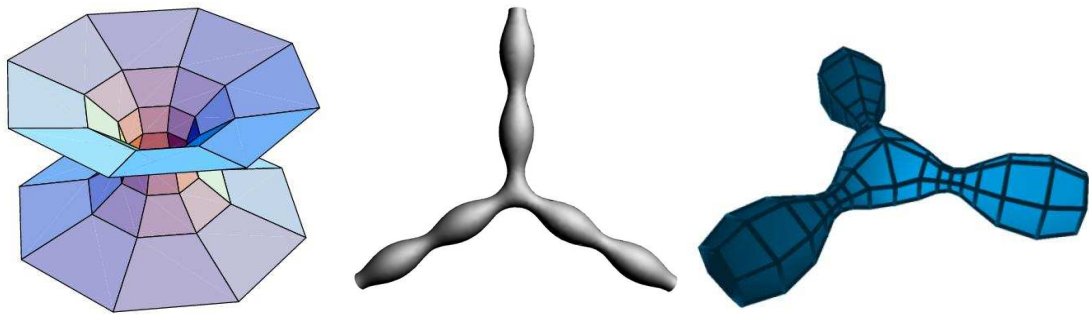


図 3: 左: 可積分系の視点から構成された離散的懸垂面. Bobenko と Pinkall によって発見された [3]. (変分法の視点から見た離散的懸垂面は, Polthier のソフトウェア JavaView を使うと容易にグラフィックスを作成でき, 上と形状は似ているが, 実際には異なる.) 中央: Schmitt のソフトウェア CMCLab によって作成された滑らかな CMC trinoid の近似. 右: T. Hoffmann の学位論文で構成された離散的な CMC trinoid [9].

後者は CMC 曲面の理論の奥深くに存在する性質だからである. 前者ももちろん重要であるが, 後者も研究すべき強い理由がある. 後者は可積分系に関連した性質を保存するので, 数学的に興味深い多くの性質を保つ [2], [7]. 例えば, Bianchi の交換 (permutability) 定理や, Backlund 変換, Darboux 変換, Ribaucour 変換等の離散版は, 後者のみに成り立つ.

興味深い点の 1 つとして, 前者と後者を同時に満たすような離散化は不可能である. このことは, 懸垂面 (極小曲面かつ回転面) を前者と後者の方法で離散化したときに, 異なる曲面になることから分かる.

最初に述べた 2 つのアプローチに話を戻す. 可積分系の視点から, 滑らかな CMC 曲面を数値的に近似することや, 上述の方法 (sinh-Gordon 方程式の離散化) で離散化することができる. Dorfmeister, Pedit, Wu によって発見され, 後に DPW の方法と呼ばれるようになった方法を使うと, 可積分系の技術を用いて滑らかな CMC 曲面 (または, より一般に対称空間への調和写像) を構成することができる [5]. この方法の中心的な役割を果たすのは, 複素平面内の単位円 S^1 に値をもつスペクトラル・パラメータ (λ と記す) と呼ばれるものである. この方法では, Kričevič [11] 以前の可積分系の理論を用いて, *extended frame* と呼ばれる λ に依存する frame (枠) を構成する. そこから CMC 曲面を構成することができ, 逆に全ての CMC 曲面はこのように構成することができる. CMC 曲面を構成していることから sinh-Gordon 方程式の解は本質的には求まっているが, この方法の特筆すべき点は, 解を求めることが困難な sinh-Gordon 方程式の解の形に拠らずに曲面を構成できることである.

本稿の初めに書いた 2 つのアプローチのどちらを用いても, DPW の方法を離散化することができる. アプローチ 1 では, 求めたい滑らかな曲面の離散的な近似値を与える. この場合, 曲面のパラメータとスペクトラル・パラメータという 2 つの無限次元の問題を, 共に有限次元の問題に置き換える必要がある. 曲面のパラメータは, Runge-Kutta の方法など通常の方法で有限次元の問題に置き換えることができる. また, スペクトラル・パラメータ $\lambda \in S^1$ は, *extended frame* を Fourier 級数に展開し, その有限個の項以外を無視することで, 有限次元の問題に置き換えることができる (実際には可積分系の方法を用いる前にこの操作を行う). 残された問題は, 計算機で数値的に解くことのできる有限次元の問題であり, Schmitt によって開発された CMCLab というソフトウェアは, この

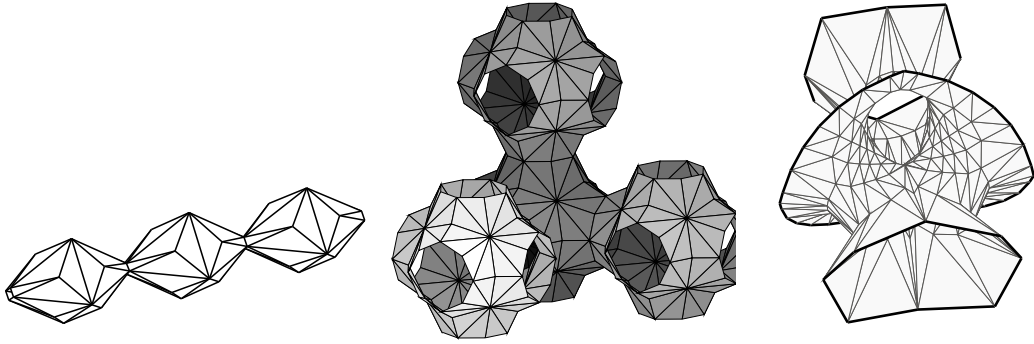


図 4: 変分法の視点から構成された離散的曲面. 左: 離散的 CMC Delaunay 曲面. 中央: 離散的 Schwarz P 曲面 (3 方向に周期的な極小曲面). 右: (滑らかな) Costa 曲面に似た, 離散的極小曲面.

ようにして曲面を描いている. アプローチ 2 では, 可積分系の性質を保存して, 離散的な DPW の方法を構成する. T. Hoffmann はこのアプローチで離散的な CMC 曲面を構成している [9].

本稿で解説した手段や, または他の手段によって, 計算機と離散化の方法と可積分系の方法は, 曲面論において中心的な役割を果たすようになった.

DPW の方法: 最後に, 興味のある方のために, \mathbb{R}^3 内の, 極小ではない任意の CMC 曲面を構成する DPW の方法について解説する. Σ を Riemann 面, z を Σ の局所座標とする. Σ 上に *holomorphic potential* と呼ばれる $sl_2(\mathbb{C})$ 値 1-形式を

$$\xi = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} c_j(z)\lambda^j & \sum_{j=-1}^{\infty} a_j(z)\lambda^j \\ \sum_{j=0}^{\infty} b_j(z)\lambda^j & -\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z)\lambda^j \end{pmatrix} dz, \quad \lambda \in S^1,$$

で定める. ただし, $a_j dz, b_j dz, c_j dz$ は Σ 上の正則 1-形式とし, a_{-1} は零点を持たないとする.

$$d\phi = \phi\xi$$

の解で λ に関して解析的な $SL_2(\mathbb{C})$ 値の解 ϕ を選ぶ. ϕ を

$$\phi = FB$$

と分解する. ただし, F は各 $\lambda \in S^1$ に対して SU_2 値となるものとし, B は $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq 1\}$ に正則に拡張され, かつ $B|_{\lambda=0}$ は上半三角行列になるものとする. この分解を岩澤分解という. ϕ は z に関して正則であるが, F と B は z に関して正則では無く実解析的である. 各 $\lambda \in S^1$ に対して, F はある CMC 曲面の frame となることから, F は *extended frame* と呼ばれる. そこで, F を Sym-Bobenko 公式

$$f = -2iH^{-1} [\lambda \partial_\lambda F \cdot F^{-1}]_{\lambda=1}$$

に代入し, $\lambda = 1$ とすると, $f \in su_2$ で

$$f = \frac{-i}{2} \begin{pmatrix} -x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

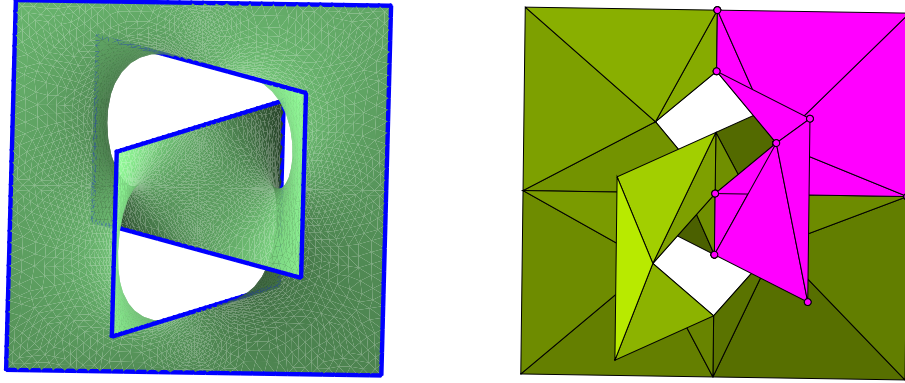


図 5: 滑らかな Fischer-Koch 型曲面 (3 方向に周期的な極小曲面) と, (変分法の視点から構成された) その離散的曲面.

と書くことができる. (F は λ にも依存しているから, $\partial_\lambda F$ は一般に 0 ではない.) ただし, $x_1 = x_1(z, \bar{z}), x_2 = x_2(z, \bar{z}), x_3 = x_3(z, \bar{z})$ は実数値関数である. DPW の方法により,

$$\Sigma \ni z \mapsto (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$$

は共形はめ込みになり, 平均曲率が H の CMC 曲面を定める. $F|_{\lambda=1}$ が f の frame を定めていることは, 上の Sym-Bobenko 公式を用いて f の z や \bar{z} での 1 階偏微分を計算することで容易に確かめられる.

基本的な例として, 球面, 円柱, Delaunay 曲面の holomorphic potential はそれぞれ

$$\xi = \lambda^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} dz, \quad \Sigma = \mathbf{C},$$

$$\xi = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{-1} + 1 \\ 1 + \lambda & 0 \end{pmatrix} dz, \quad \Sigma = \mathbf{C} \setminus \{0\},$$

$$\xi = \xi = \begin{pmatrix} 0 & s\lambda^{-1} + t \\ s\lambda + t & 0 \end{pmatrix} \frac{dz}{z}, \quad \Sigma = \mathbf{C} \setminus \{0\},$$

で与えられる. ただし, $s, t \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1/4\}, s + t = 1/2$.

本稿の執筆にあたり, 日本語の誤りを指摘していただいた藤森祥一氏に感謝の意を表する.

参考文献

- [1] U. Abresch, Constant mean curvature tori in terms of elliptic functions, *J. Reine Angew. Math.*, **374** (1987), 169–192.
- [2] A. Bobenko and U. Pinkall, Discretization of surfaces and integrable systems, *Oxford Lecture Ser. Math. Appl.*, **16**, Oxford Univ. Press (1999), 3–58.
- [3] A. Bobenko and U. Pinkall, Discrete isothermic surfaces, *J. reine angew. Math.*, **475** (1996), 187–208.
- [4] C. Costa, Example of a complete minimal immersion of \mathbf{R}^3 of genus one and three embedded ends, *Bull. Soc. Bras. Mat.*, **15** (1984), 47–54.
- [5] J. Dorfmeister, F. Pedit and H. Wu, Weierstrass type representation of harmonic maps into symmetric spaces, *Comm. Anal. Geom.*, **6** (1998), 633–668.
- [6] W. Fischer and E. Koch, On 3-periodic minimal surfaces with noncubic symmetry, *Zeitschrift für Kristallographie*, **183** (1988), 129–152.
- [7] U. Hertrich-Jeromin, Introduction to Möbius Differential Geometry, Cambridge University Press, London Math. Society Lect. Note Series **300** (2003).
- [8] D. Hoffman and W. H. Meeks III, A complete embedded minimal surface with genus one, three ends and finite total curvature, *J. Diff. Geom.*, **21** (1985), 109–127.
- [9] T. Hoffmann, Discrete curves and surfaces, Ph.D. thesis, TU-Berlin (2000).
- [10] H. Hopf, Differential geometry in the large, *Lect. Notes in Math.*, **1000**, Springer, Berlin (1983).
- [11] I. M. Kričever, An analogue of the d’Alembert formula for the equations of a principal chiral field and the sine-Gordon equation, *Soviet Math. Dokl.*, **22** (1980), 79–84.
- [12] M. Melko and I. Sterling, Integrable systems, harmonic maps and the classical theory of surfaces, *Aspects Math.*, **21**, Vieweg (1994), 129–144.
- [13] U. Pinkall and K. Polthier, Computing discrete minimal surfaces and their conjugates, *J. Exp. Math.*, **2** (1993), 15–36.
- [14] K. Polthier and W. Rossman, Discrete Constant Mean Curvature Surfaces and their Index, *J. Reine. U. Angew. Math.*, **549** (2002), 47–77.
- [15] M. Voretzsch, Dissertation, Gottingen (1882).
- [16] H. C. Wente, Counterexample to a conjecture of H. Hopf, *Pac. J. Math.*, **121** (1986), 193–243.
- [17] W. Weidlich, Flächen mit konstanter mittlerer Krümmung und einer Familie ebener Krümmungslinien, Master’s thesis, TU-Berlin (2006).
- [18] W. Wunderlich, Zur Differenzengeometrie der Flächen konstanter negativer Krümmung, *Osterreich. Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl. S.-B. IIa.*, **160** (1951), 39–77.

(ウエイン ラスマン ・神戸大学 理学部 助教授)