「コイン投げから確率過程へ」

矢野　孝次　(理学研究科数学専攻)

July 27, 2008.

内容

1. ブラウン運動

Antoni van Leeuwenhoek (1632-1723)

- 池の水を顕微鏡で観察していて微粒子の不規則な運動を発見.

生命現象だろうと思っていたらしい.

Robert Brown (1773-1858)

- いろいろな微粒子を顕微鏡で観察し,

微粒子の不規則な運動は物理現象であることを解明.

- 花粉, 古い植物標本, 粉砕した岩石やガラス, ロンドンの煤煙, . . .
- 彼の功績を称え, この不規則運動は**ブラウン運動**と呼ばれる.

注.「微粒子」は花粉そのものではなく,

花粉が水を含んで破裂し, その中から放出されるもの

1. ブラウン運動

Albert Einstein (1879-1955)

- ブラウン運動を記述する数学モデルを提唱.

”増分が独立な正規分布をする系”

(その存在については数学的な問題が残された)

Jean Baptiste Perrin (1870-1942)

- Einstein の理論を実験により実証

Norbert Wiener (1894-1964)

- **連続時間確率過程**としてブラウン運動を数学的に構成

2. (1) サイコロ振り

仮定. サイコロを振って

$$1\text{の目が出る確率} = \frac{1}{6}$$
$$2\text{の目が出る確率} = \frac{1}{6}$$
$$3\text{の目が出る確率} = \frac{1}{6}$$
$$4\text{の目が出る確率} = \frac{1}{6}$$
$$5\text{の目が出る確率} = \frac{1}{6}$$
$$6\text{の目が出る確率} = \frac{1}{6}$$

注. 実際のサイコロは，それぞれの目が出る確率は均等ではないようである.

また,「角で立つ」ような可能性も場合によっては考えうる.

1から6の目を確率$\frac{1}{6}$ずつにするのは理想化のための仮定である.

2. (2) サイコロ２回振り

	２回目					
1回目	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36

2. (2) サイコロ２回振り

$$X_1 = (1\text{回目に出た目}) \qquad X_2 = (2\text{回目に出た目})$$

	$X_2=1$	$X_2=2$	$X_2=3$	$X_2=4$	$X_2=5$	$X_2=6$
$X_1=1$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$
$X_1=2$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$
$X_1=3$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$
$X_1=4$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$
$X_1=5$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$
$X_1=6$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$

X_1, X_2は**確率変数**と呼ばれる.

2. (3) サイコロ繰り返し振り

サイコロを繰り返し振る.

$$X_n = (n \text{回目に出た目})$$

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$$

1から6の値をとる確率変数の無限列

2. (4) サイコロ振りの**極限定理**

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

大数の法則 (たいすうのほうそく).

- $\dfrac{S_n}{n} \xrightarrow{n \to \infty} \dfrac{7}{2}$ (概収束).

中心極限定理.

- $\dfrac{S_n - \frac{7}{2}n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \to \infty}$ 正規分布 (法則収束).

シミュレーションで見る

2．（5）コイン投げ

仮定．コインを投げて

$$表が出る確率 = \frac{1}{2}$$
$$裏が出る確率 = \frac{1}{2}$$

注．他の仮定もありうる．例えば,

- いびつなコイン投げ: 表と裏とが等確率でない
- コインが立つことを想定に入れる

など．ここでは扱わない.

2.（6）コイン２回投げ

コインを２回投げて出た目を(1回目,2回目)と書くと,

$$(\text{表}, \text{表})\text{となる確率} = \frac{1}{4}$$

$$(\text{表}, \text{裏})\text{となる確率} = \frac{1}{4}$$

$$(\text{裏}, \text{表})\text{となる確率} = \frac{1}{4}$$

$$(\text{裏}, \text{裏})\text{となる確率} = \frac{1}{4}$$

2.（6）コイン２回投げ

コインを２回投げる.

$$X_1 = \begin{cases} +1 & 1\text{回目が表} \\ -1 & 1\text{回目が裏} \end{cases} \qquad X_2 = \begin{cases} +1 & 2\text{回目が表} \\ -1 & 2\text{回目が裏} \end{cases}$$

$$(X_1, X_2) = (+1, +1)\text{となる確率} = \frac{1}{4}$$
$$(X_1, X_2) = (+1, -1)\text{となる確率} = \frac{1}{4}$$
$$(X_1, X_2) = (-1, +1)\text{となる確率} = \frac{1}{4}$$
$$(X_1, X_2) = (-1, -1)\text{となる確率} = \frac{1}{4}$$

X_1およびX_2は**確率変数**と呼ばれる.

2.（7）コイン繰り返し投げ

コインを繰り返し投げる.

$$X_n = \begin{cases} +1 & \text{n回目が表} \\ -1 & \text{n回目が裏} \end{cases}$$

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$$

$+1$ か -1 の値をとる確率変数の無限列

2. (8) コイン投げの極限定理

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

大数の法則 (たいすうのほうそく).

- $\dfrac{S_n}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (概収束).

中心極限定理.

- $\dfrac{S_n}{\sqrt{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}$ 標準正規分布 (法則収束).

3. ランダムウォーク

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

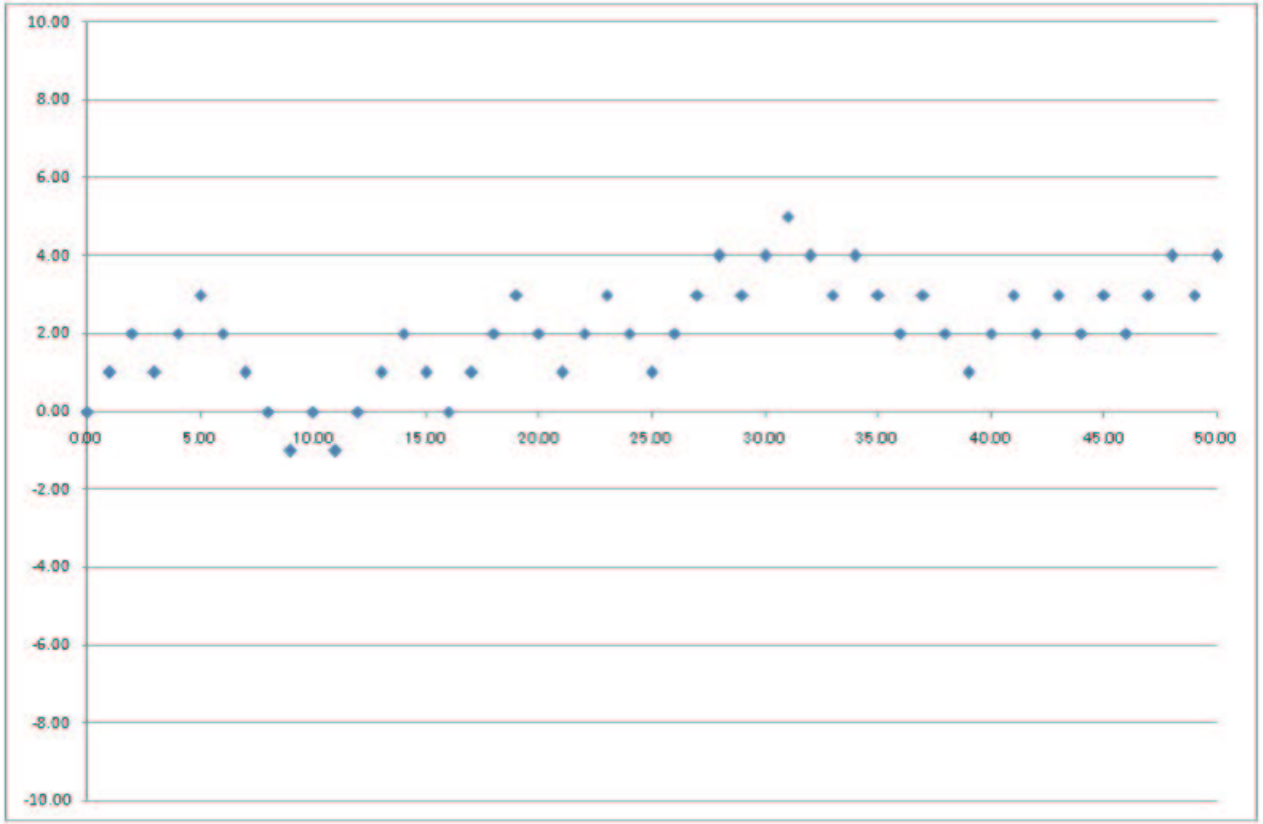
$$\begin{aligned} &S_0 = 0 \\ &S_n = S_{n-1} + X_n \qquad (n = 1, 2, \ldots) \end{aligned}$$

n を時刻，数列 $\{S_n\}$ を数直線上の点の運動と考え，**ランダムウォーク**と呼ぶ.

時刻 n のとき，コインを投げて，$\begin{cases} \text{表が出たら正の方向に一歩進み,} \\ \text{裏が出たら負の方向に一歩進む.} \end{cases}$

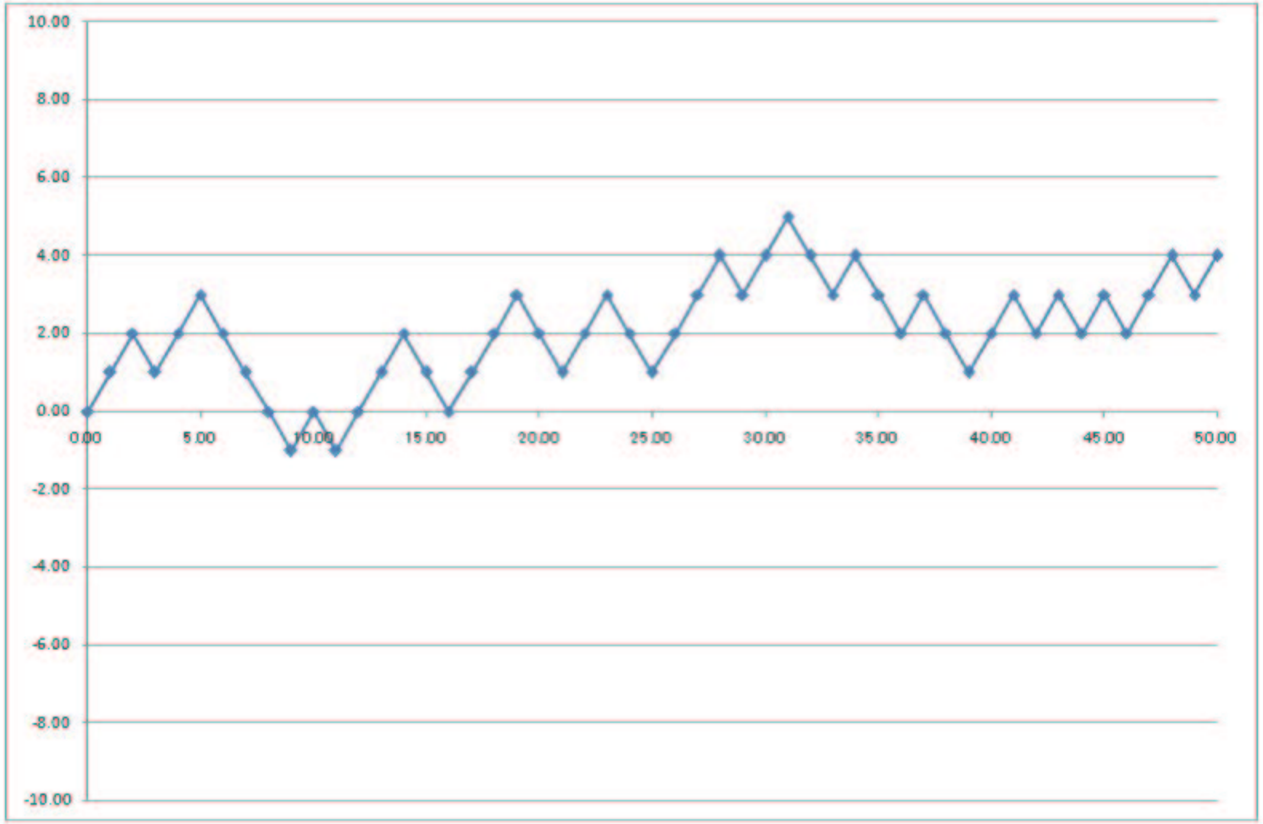
3．ランダムウォーク

(n, S_n) をプロットしたグラフを考える



3. ランダムウォーク

(n, S_n) をプロットしたグラフを線分で結んだものを $(t, S(t))$ と書く



3．ランダムウォークの極限定理

ランダムウォークの折れ線グラフ $(t, S(t))$ を

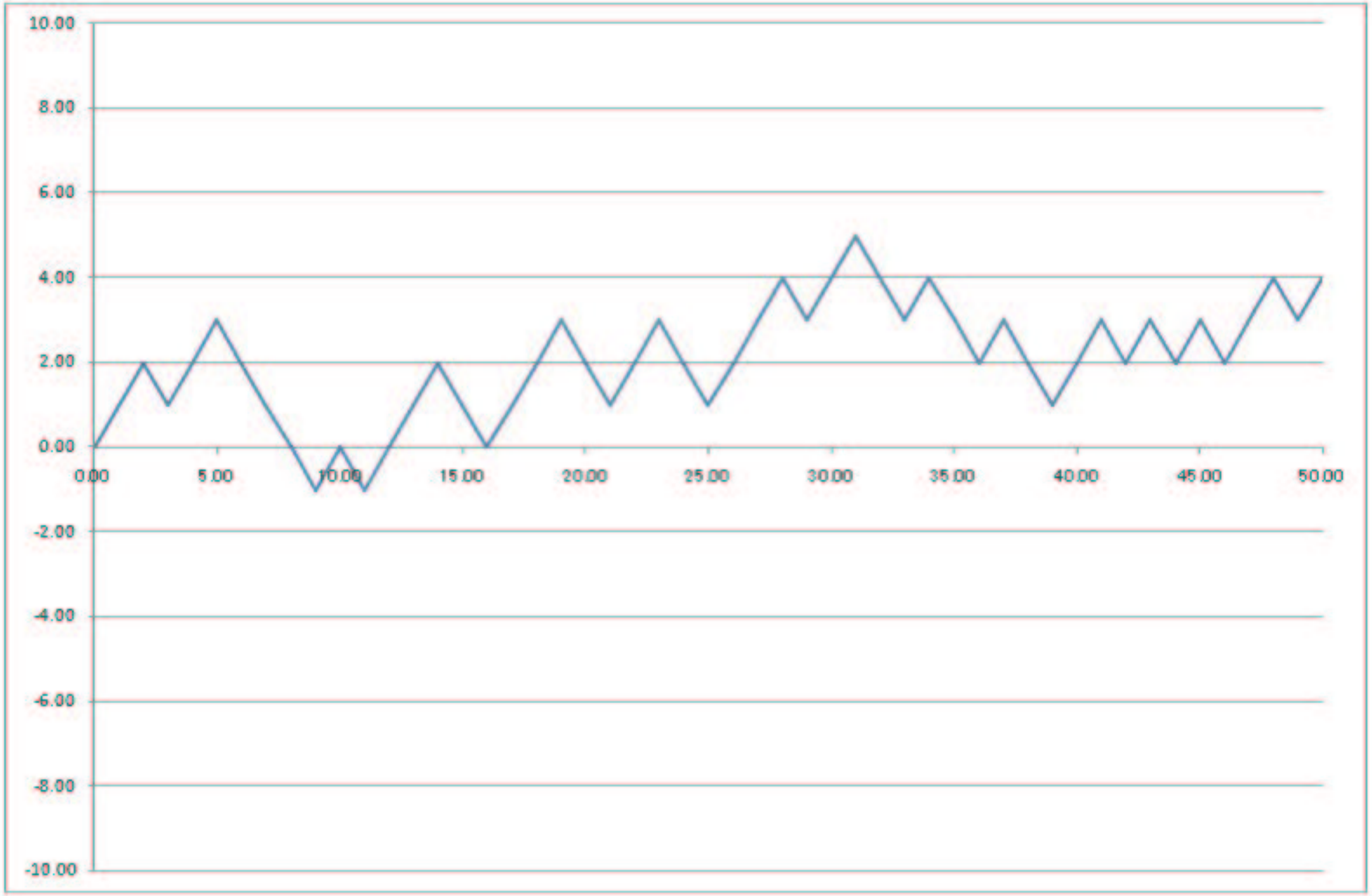
x 軸方向に $\dfrac{1}{N}$ 倍縮小し，y 軸方向に $\dfrac{1}{\sqrt{N}}$ 倍縮小

したものを $(t, S^{(N)}(t))$ と書く.

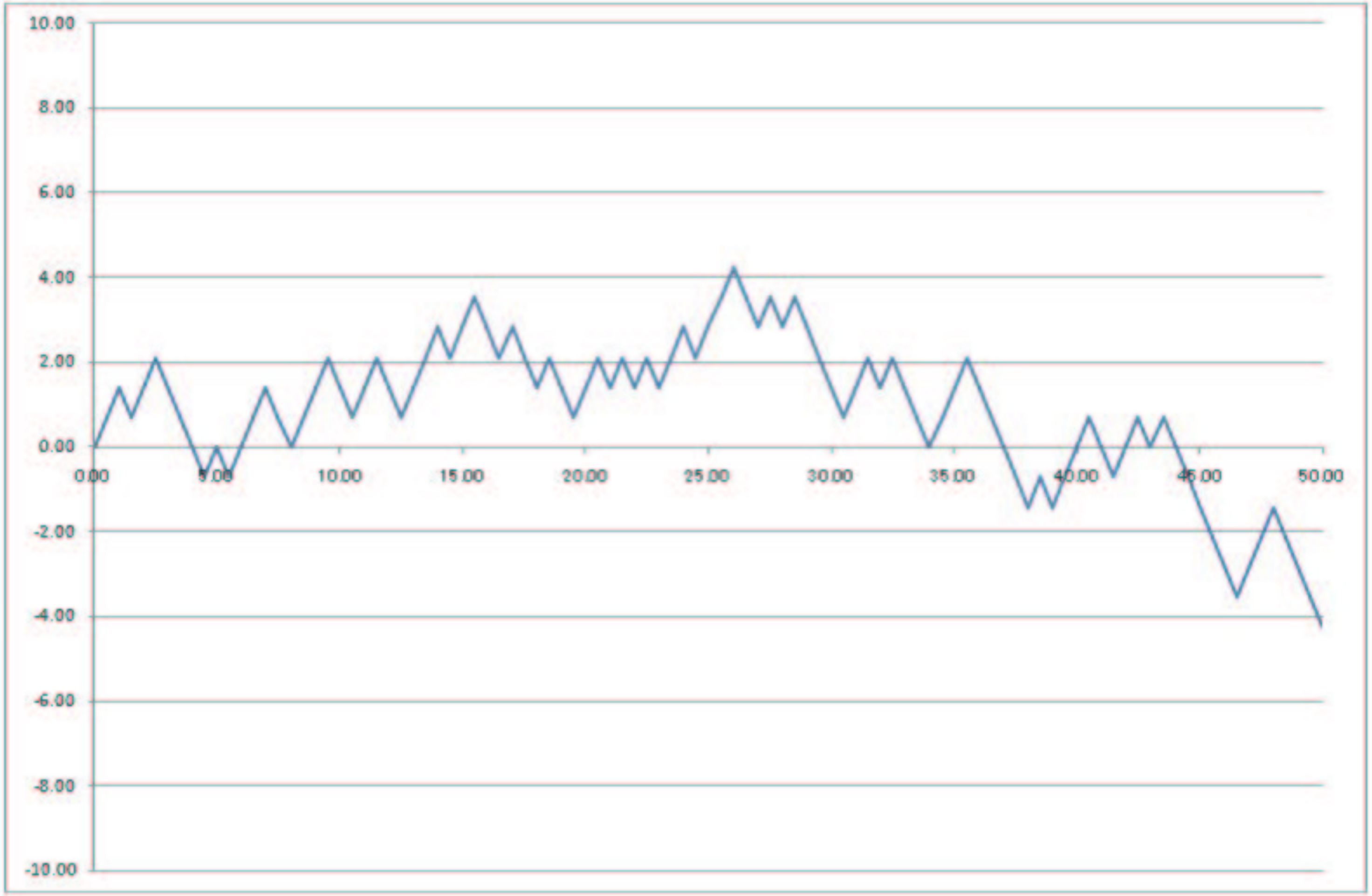
$$S^{(N)}(t) = \frac{S(Nt)}{\sqrt{N}}$$

N を大きくしていくとどうなるか?

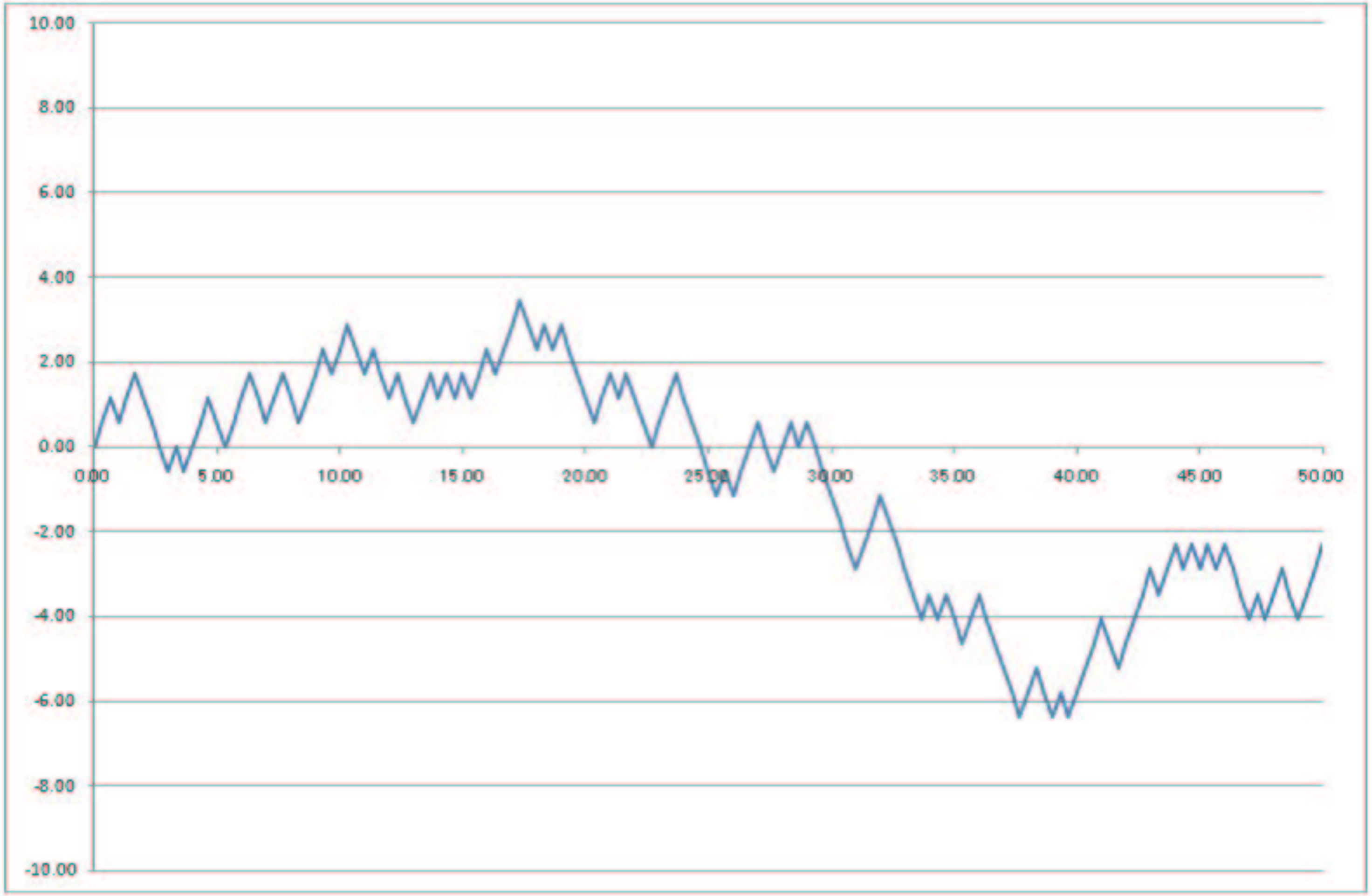
$$S^{(1)}(t) = \frac{S(1t)}{\sqrt{1}}$$



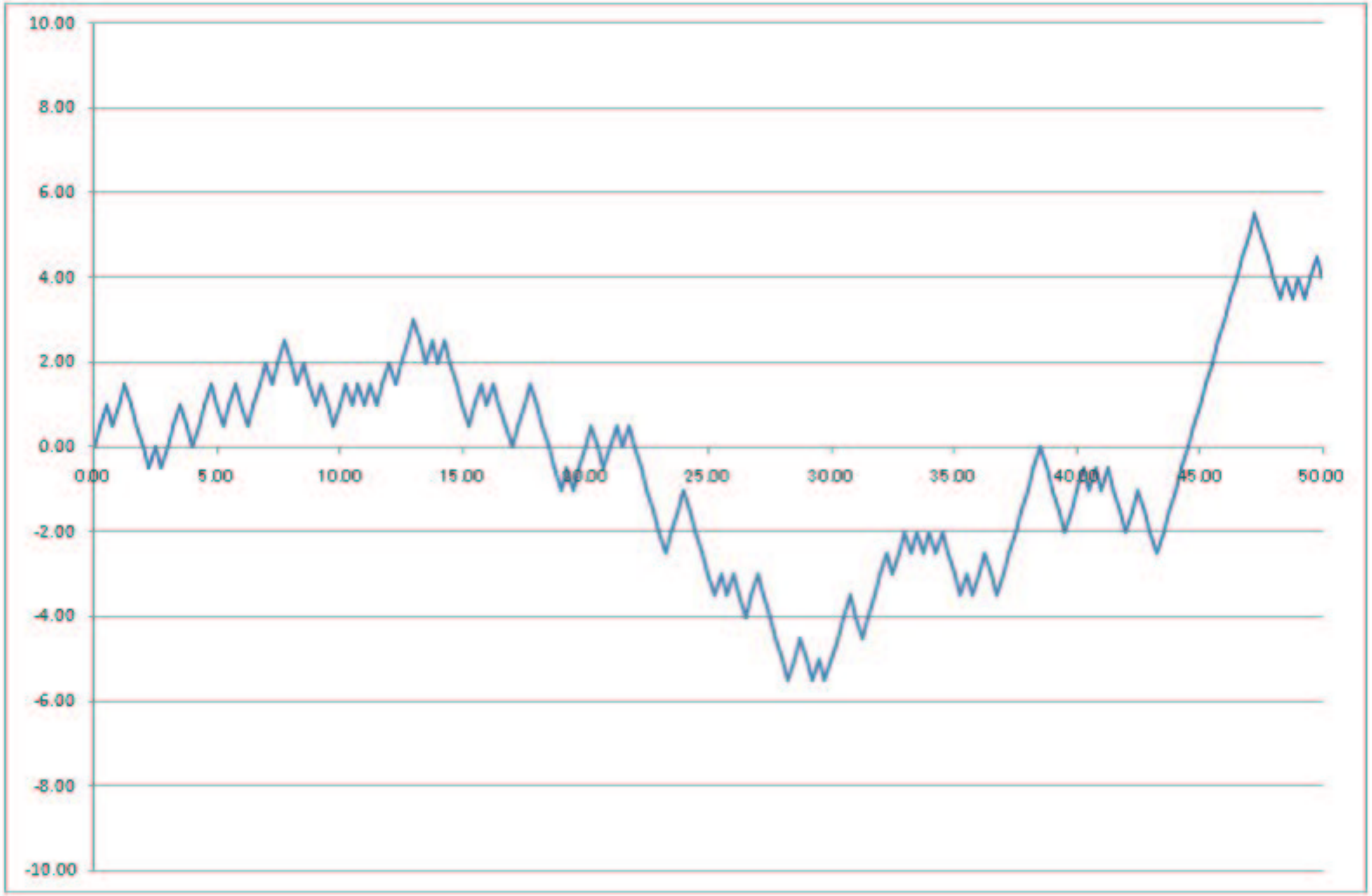
$$S^{(2)}(t) = \frac{S(2t)}{\sqrt{2}}$$



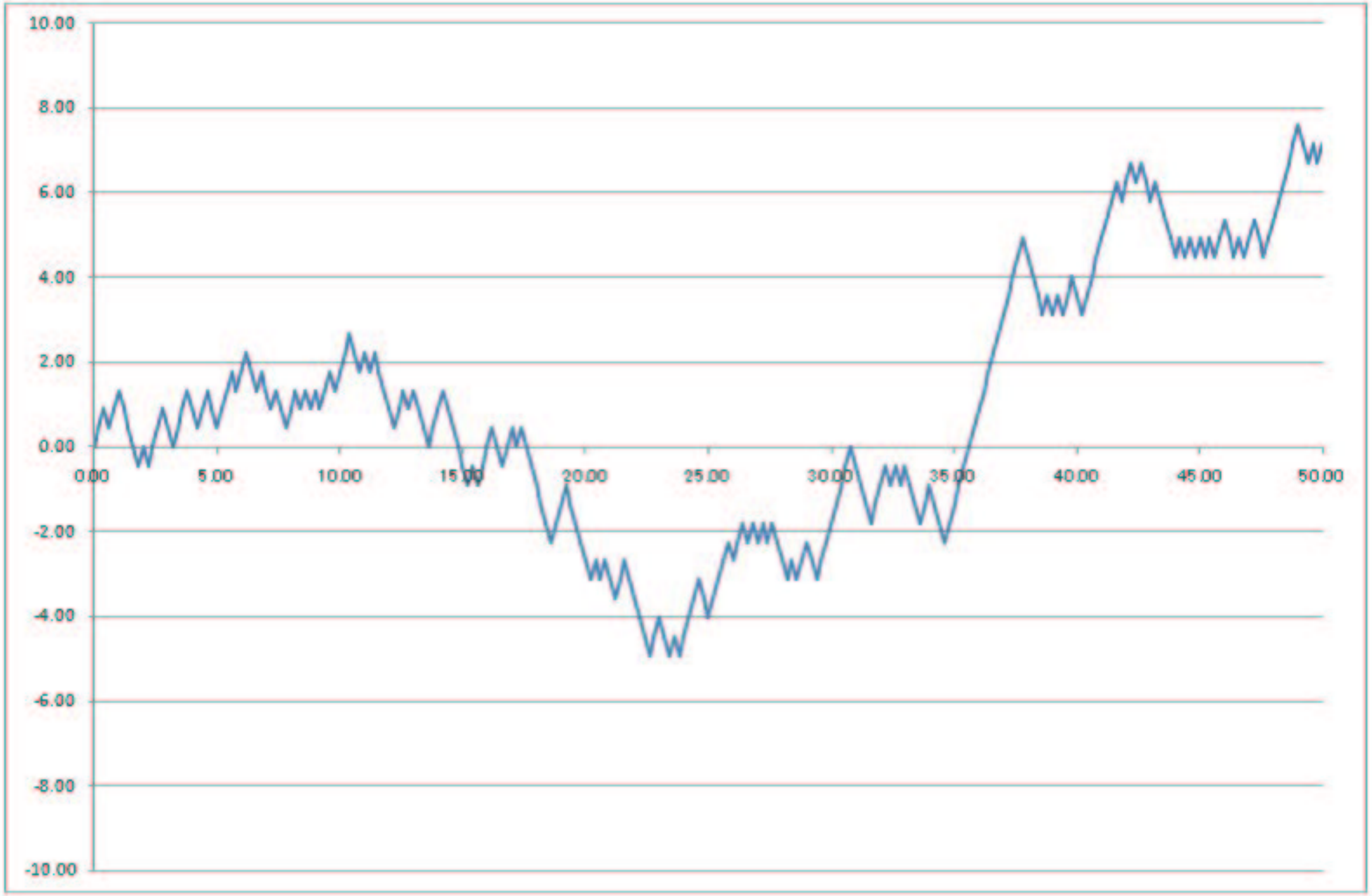
$$S^{(3)}(t) = \frac{S(3t)}{\sqrt{3}}$$



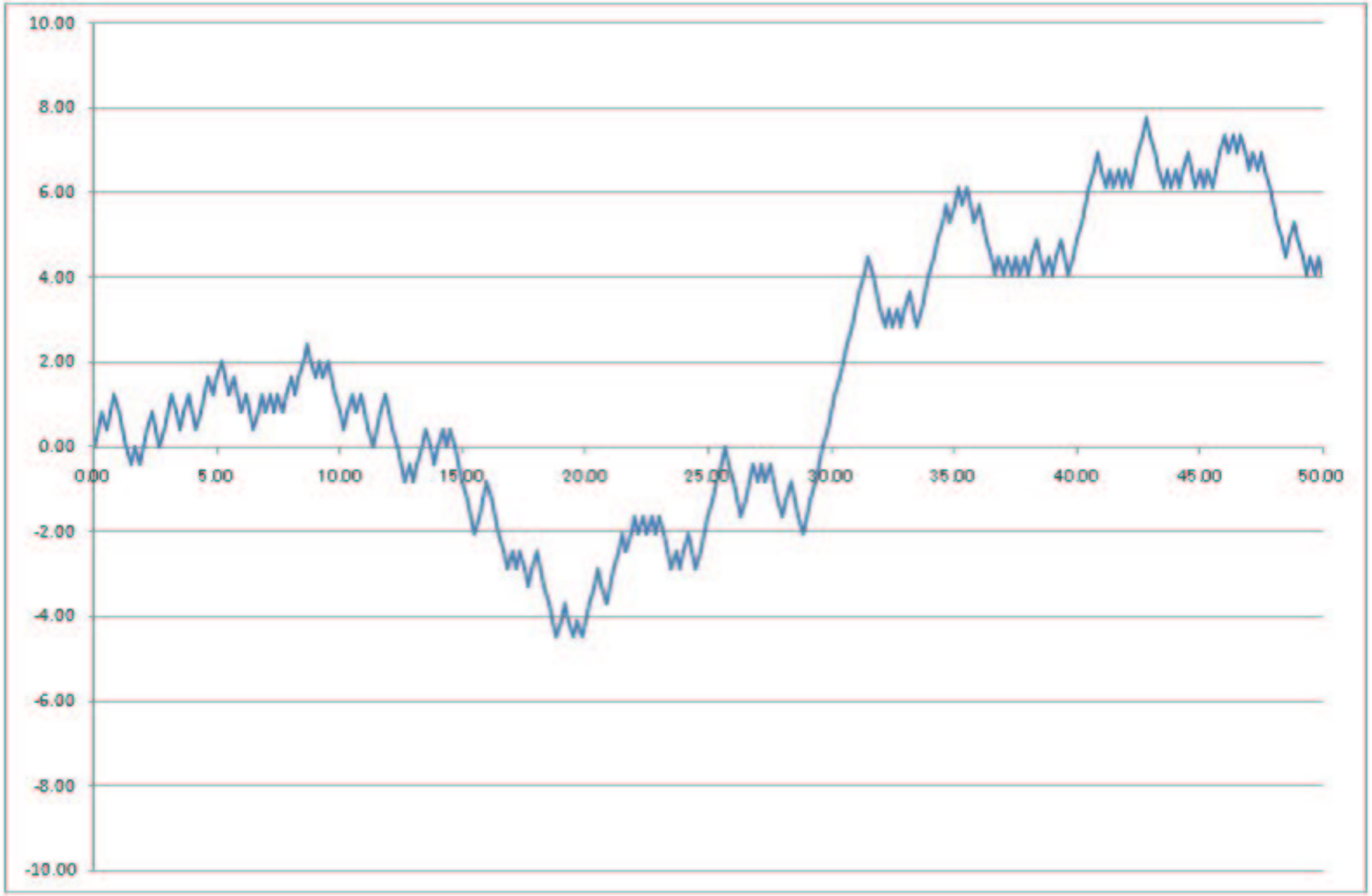
$$S^{(4)}(t) = \frac{S(4t)}{\sqrt{4}}$$



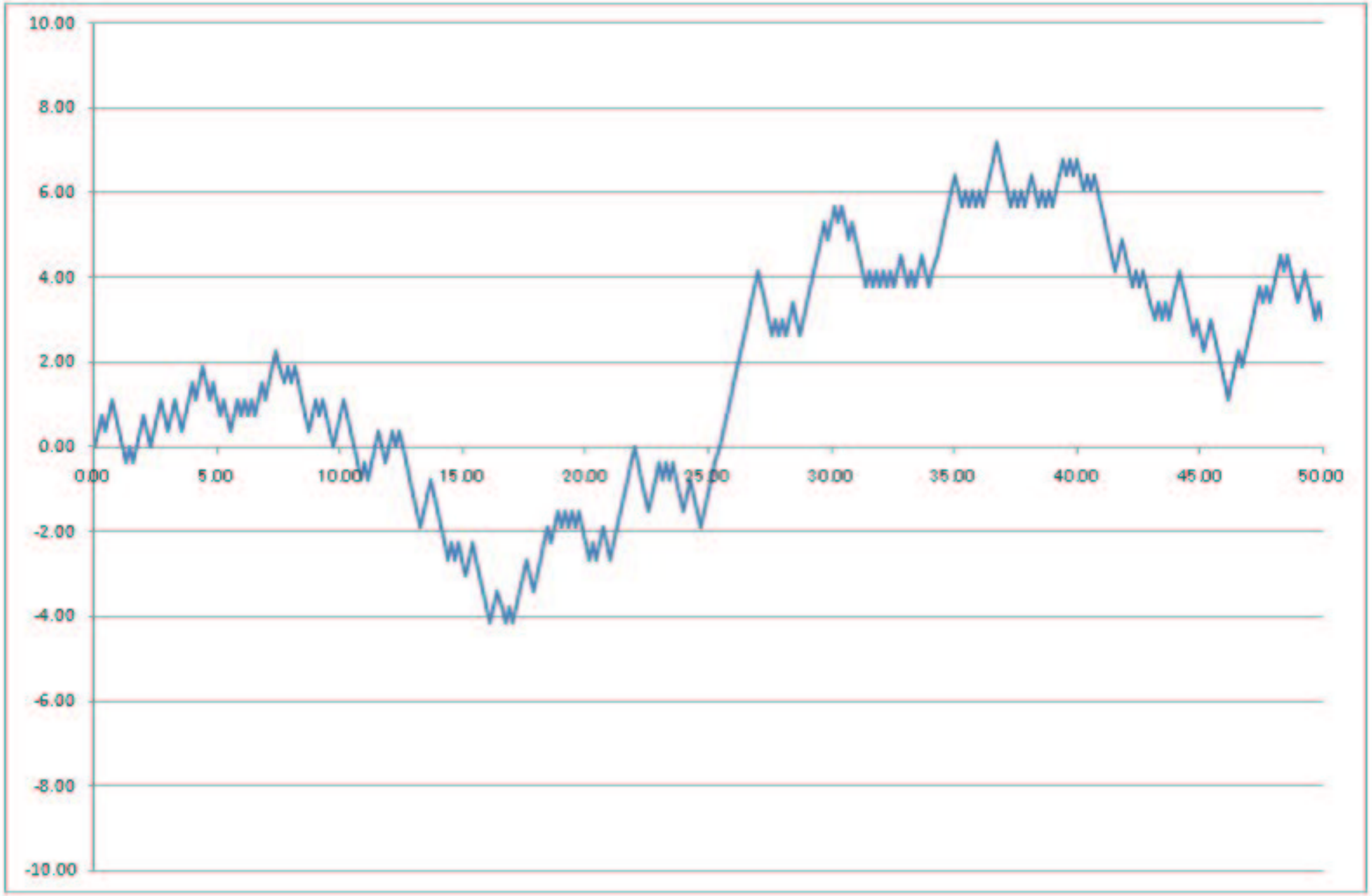
$$S^{(5)}(t) = \frac{S(5t)}{\sqrt{5}}$$



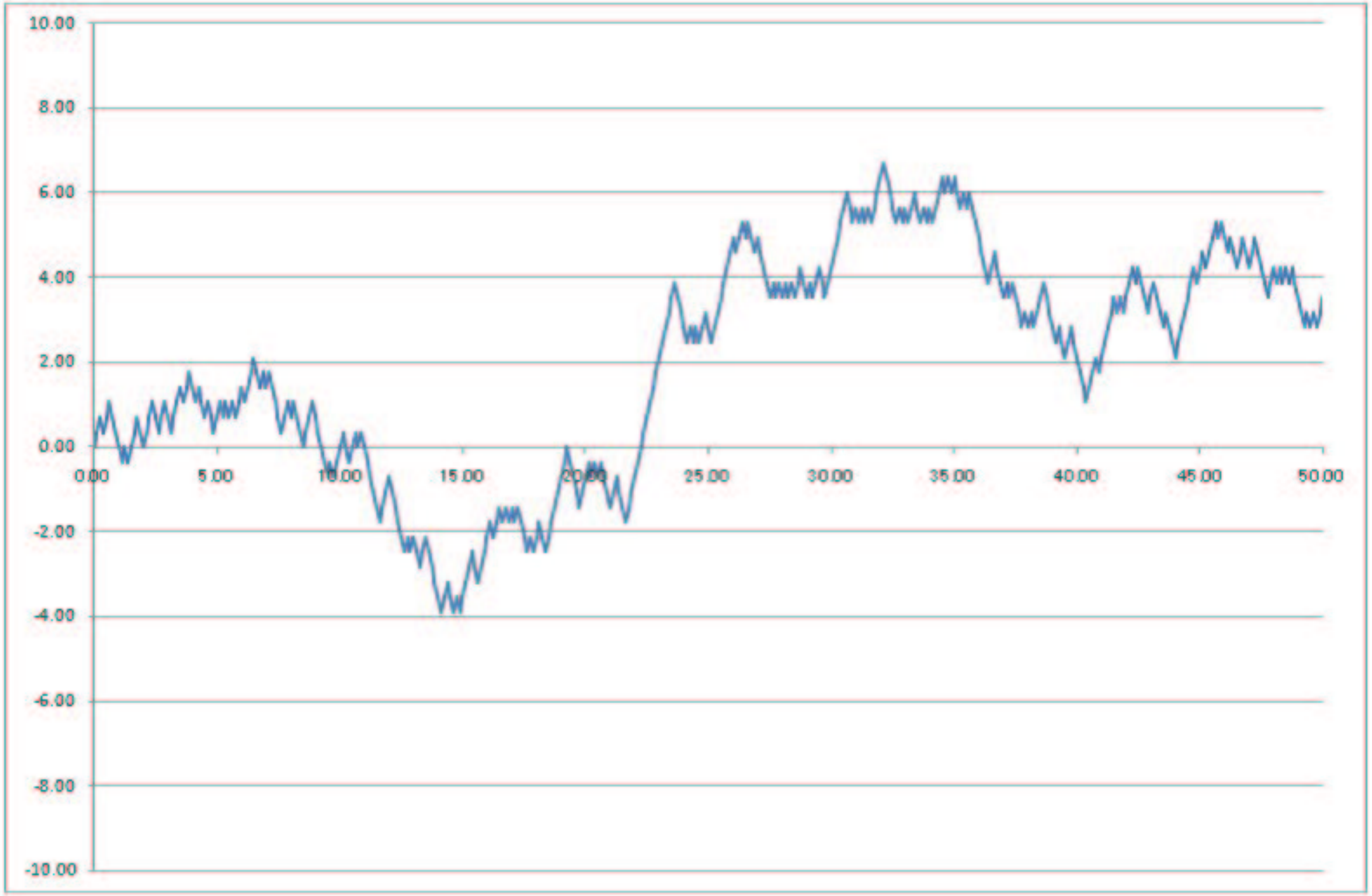
$$S^{(6)}(t) = \frac{S(6t)}{\sqrt{6}}$$



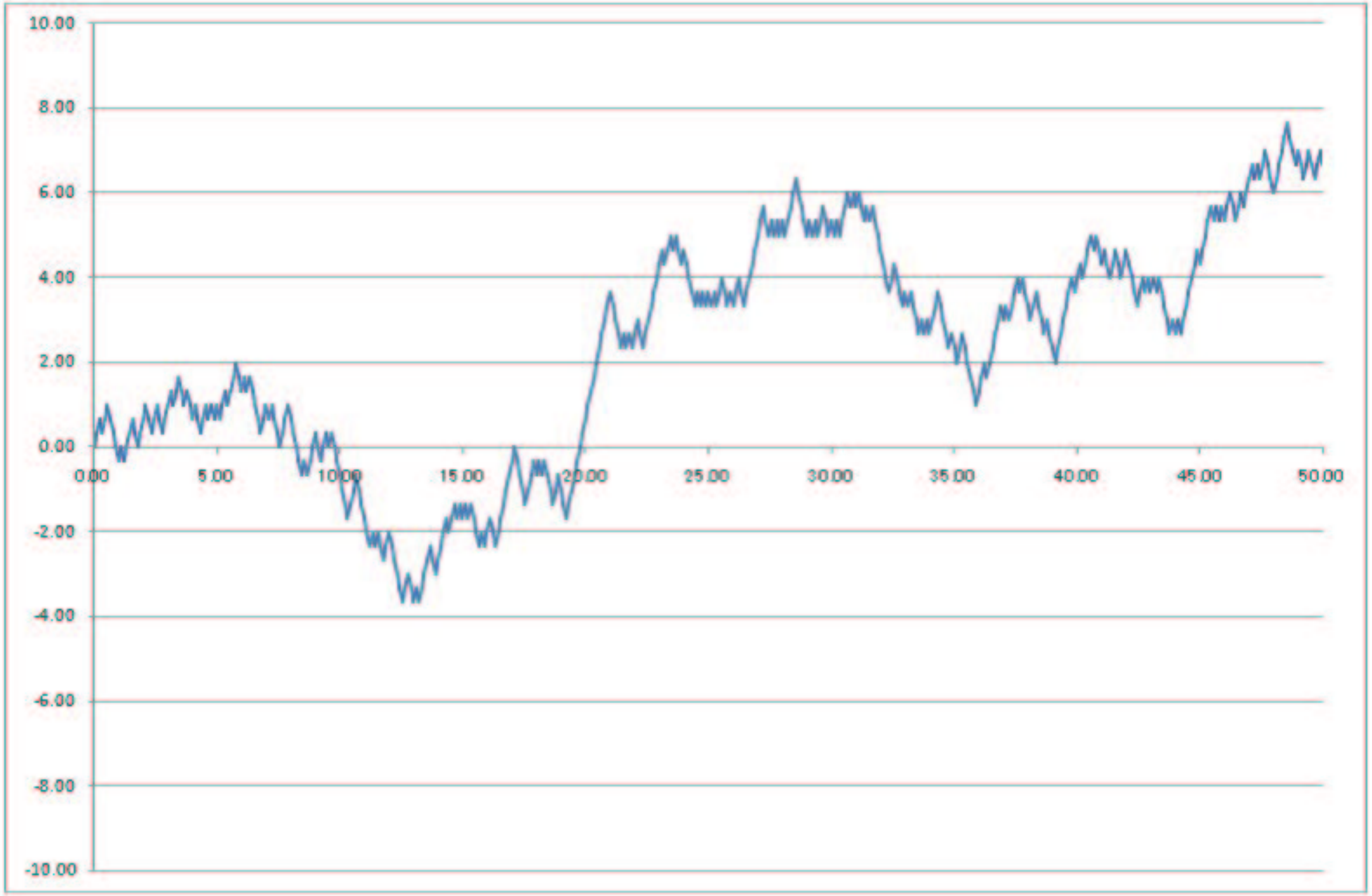
$$S^{(7)}(t) = \frac{S(7t)}{\sqrt{7}}$$



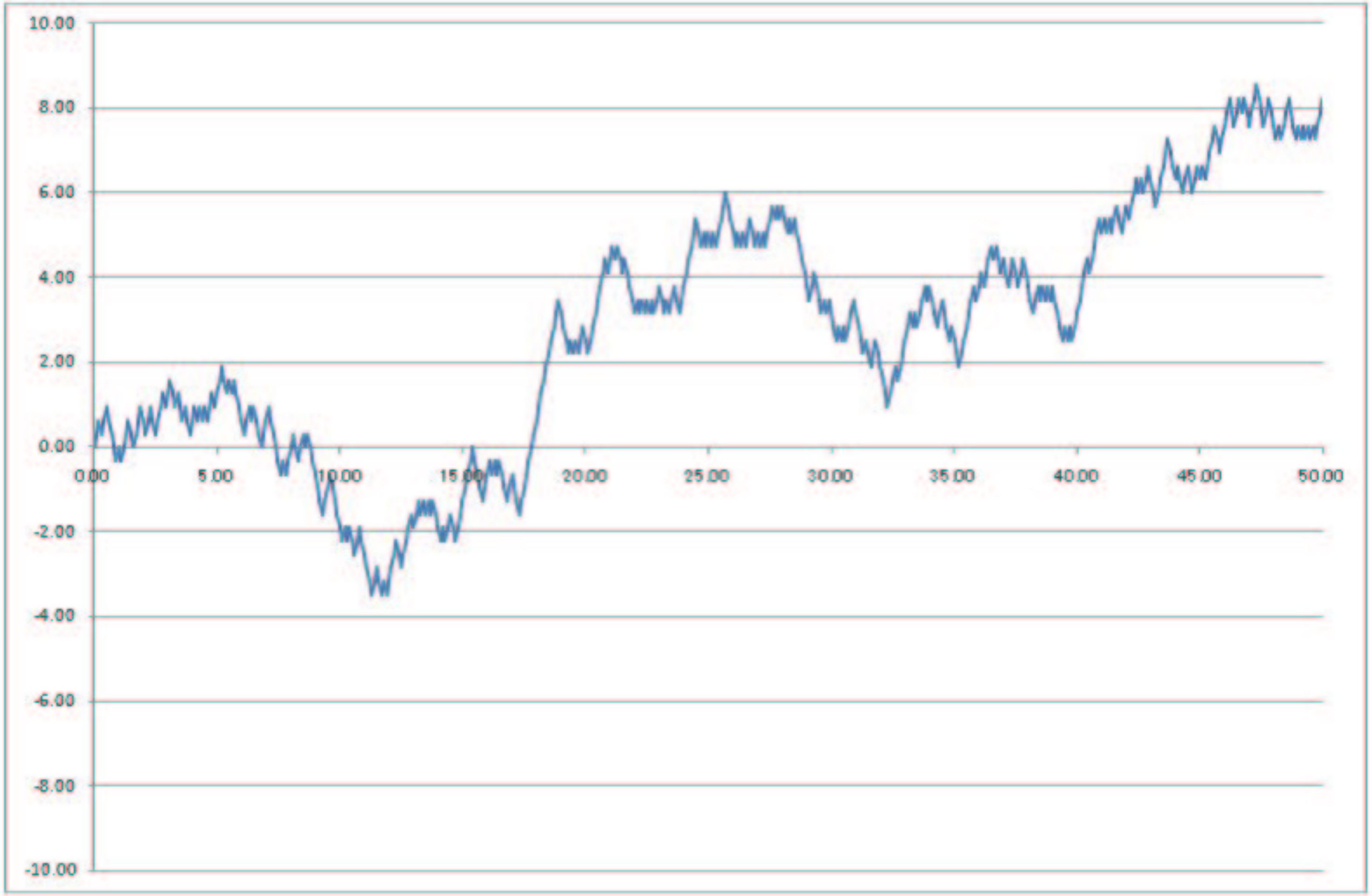
$$S^{(8)}(t) = \frac{S(8t)}{\sqrt{8}}$$



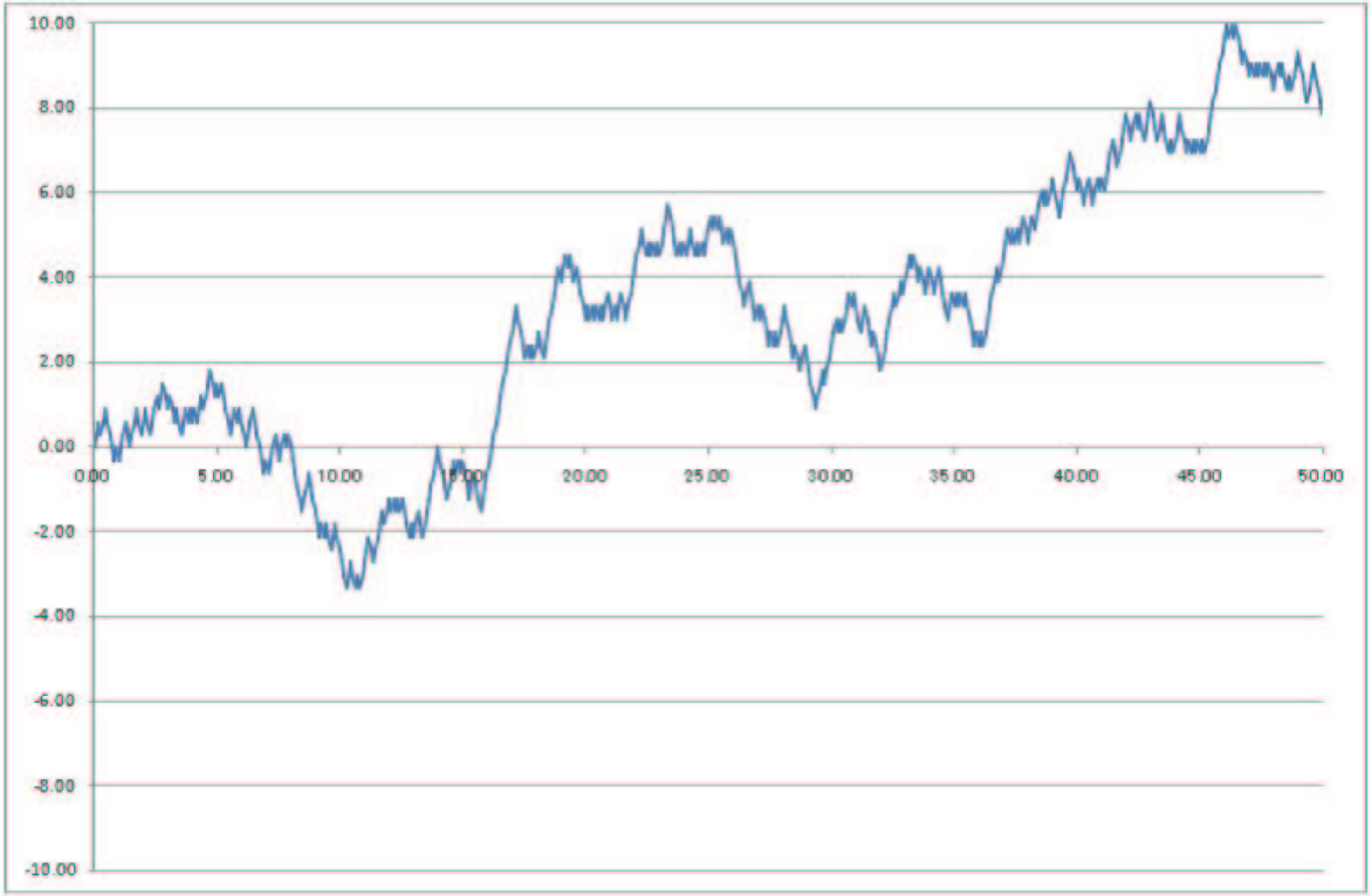
$$S^{(9)}(t) = \frac{S(9t)}{\sqrt{9}}$$



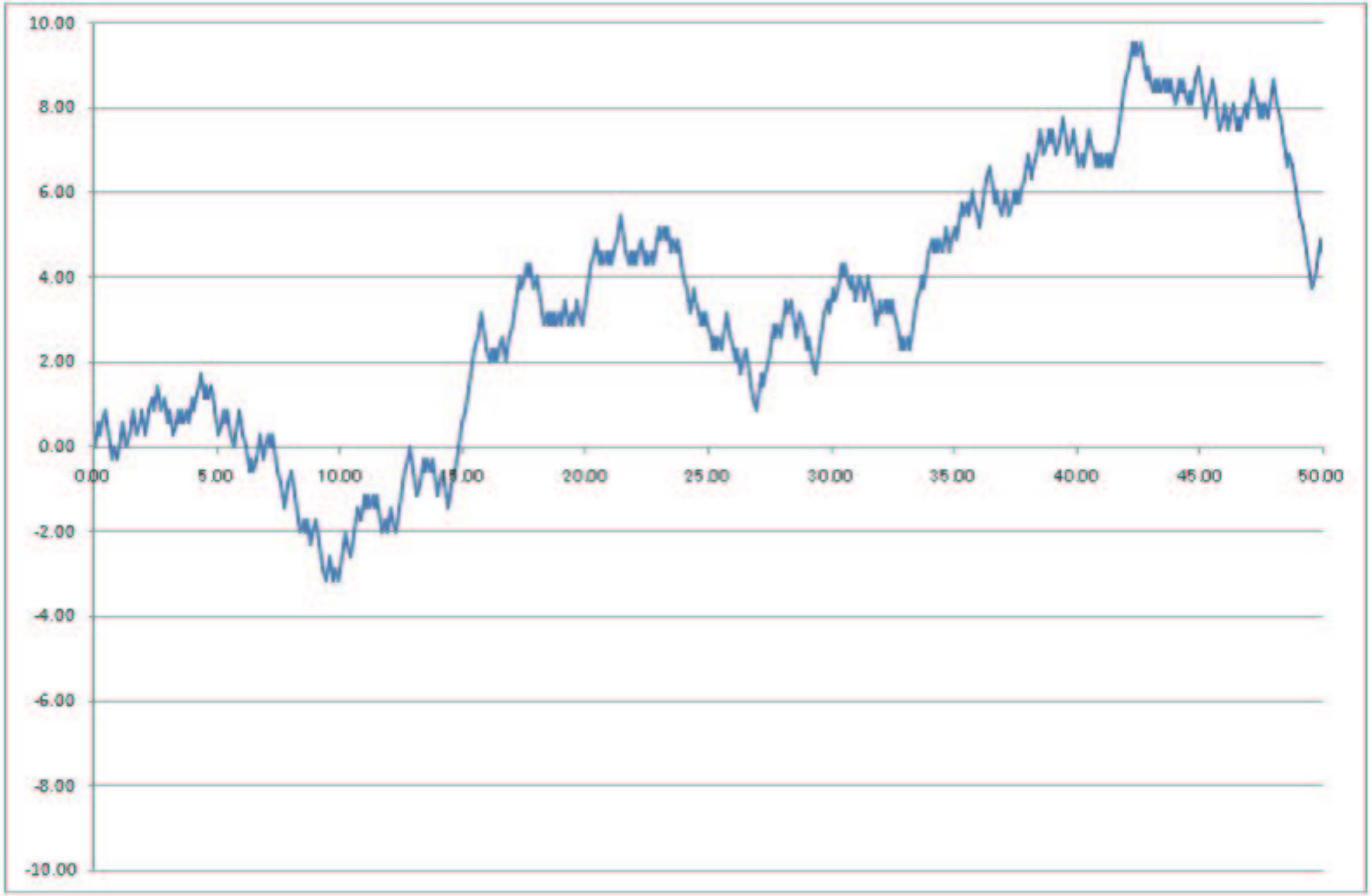
$$S^{(10)}(t) = \frac{S(10t)}{\sqrt{10}}$$



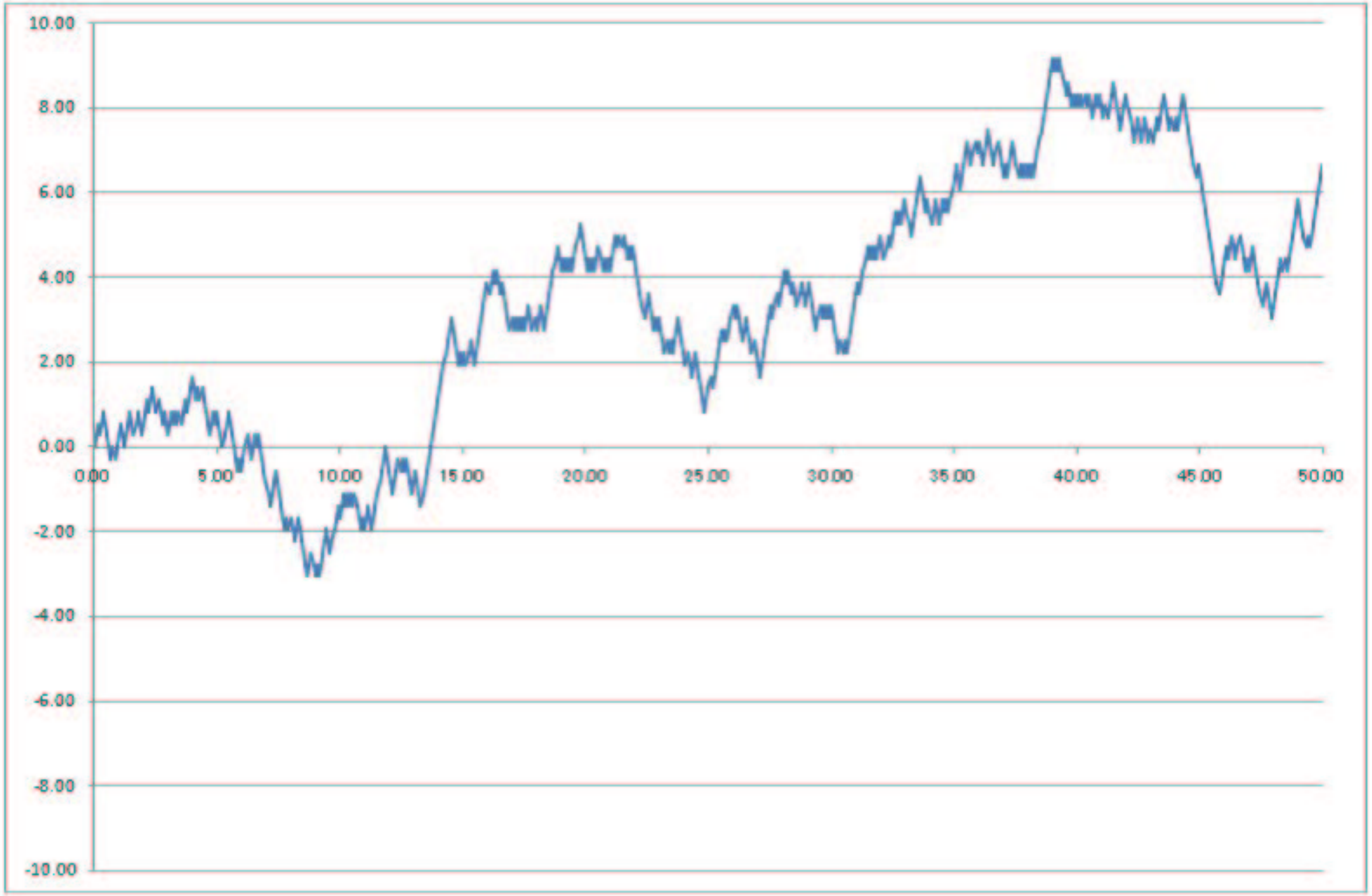
$$S^{(11)}(t) = \frac{S(11t)}{\sqrt{11}}$$



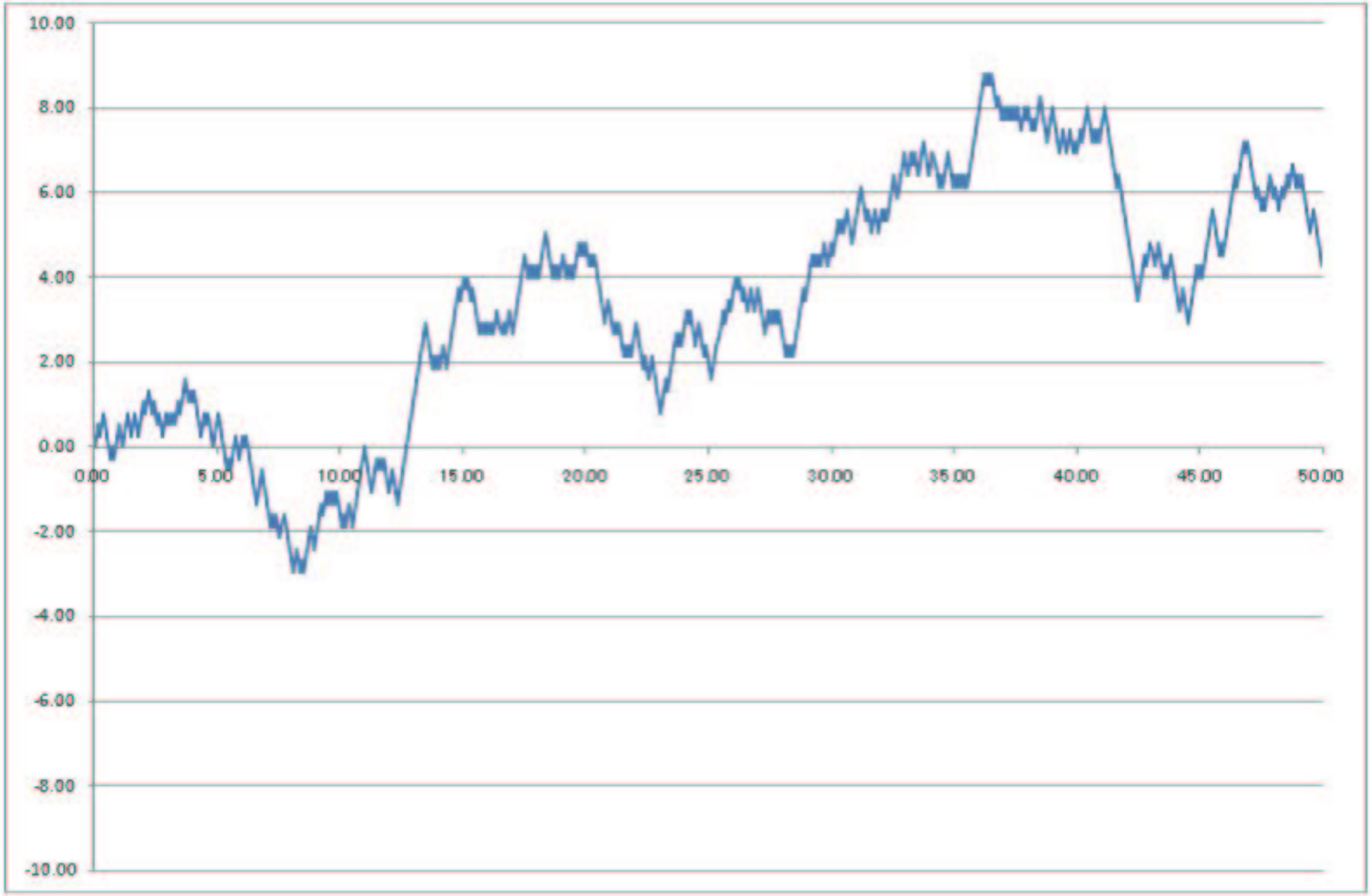
$$S^{(12)}(t) = \frac{S(12t)}{\sqrt{12}}$$



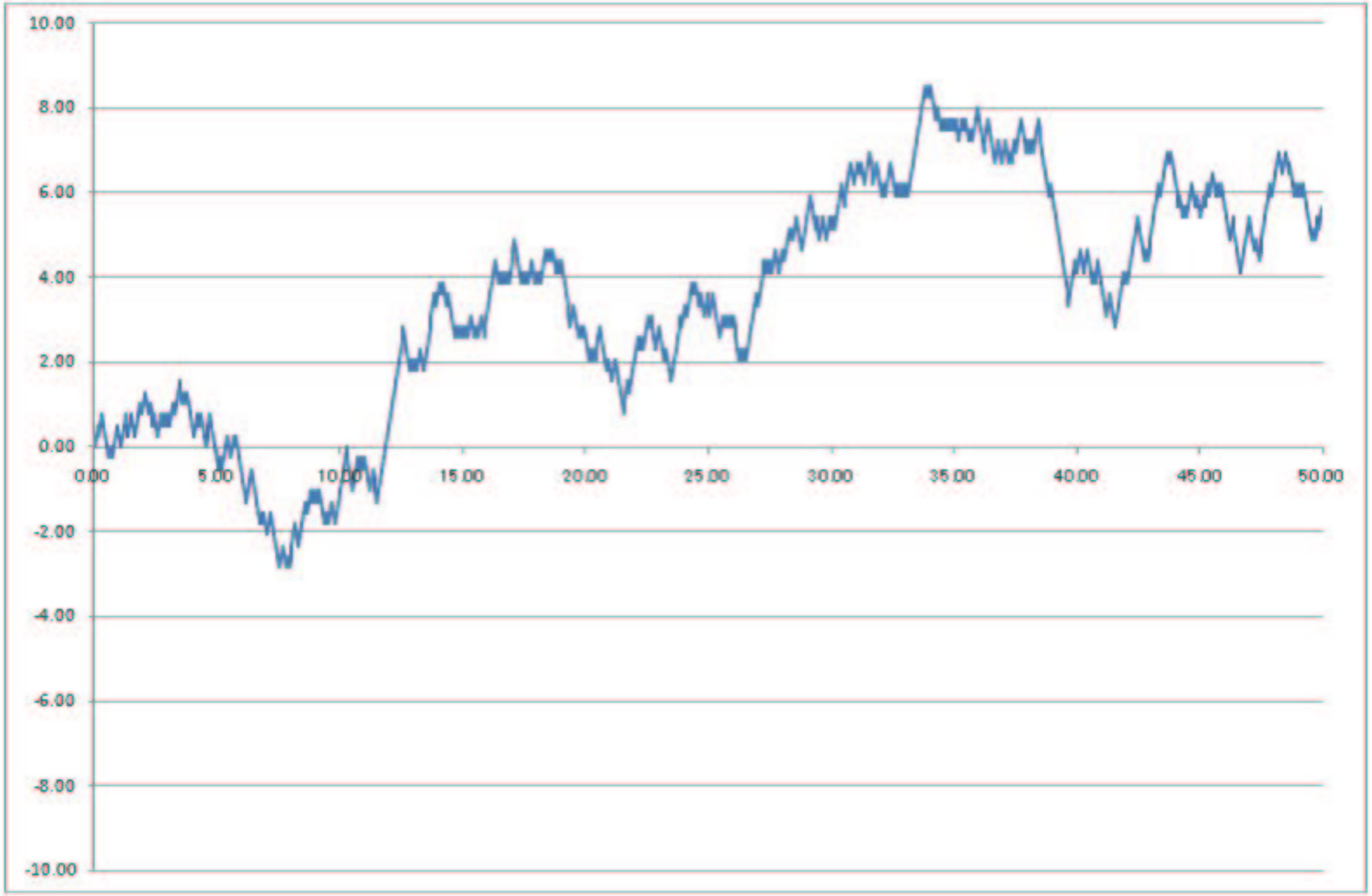
$$S^{(13)}(t) = \frac{S(13t)}{\sqrt{13}}$$



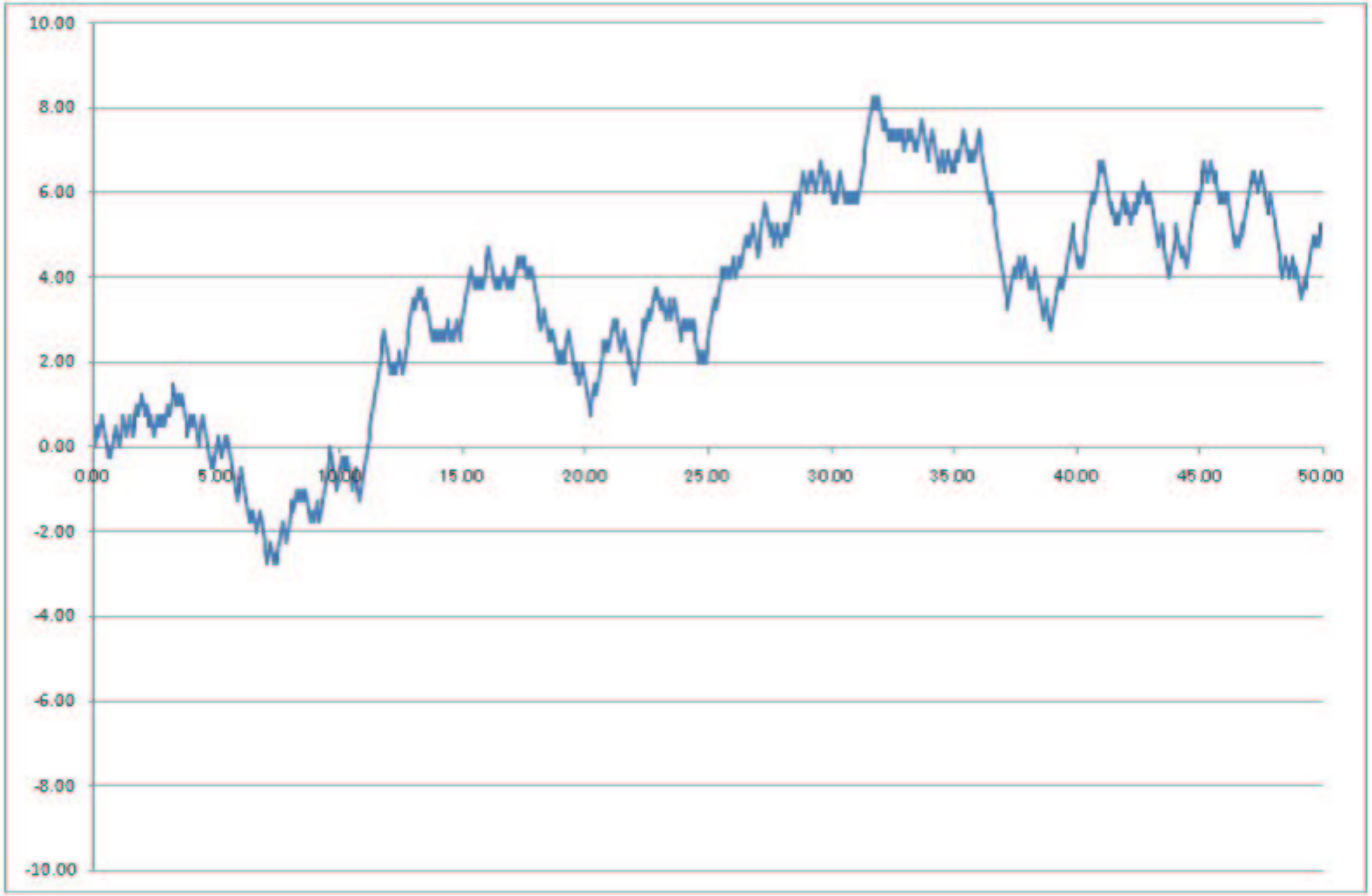
$$S^{(14)}(t) = \frac{S(14t)}{\sqrt{14}}$$



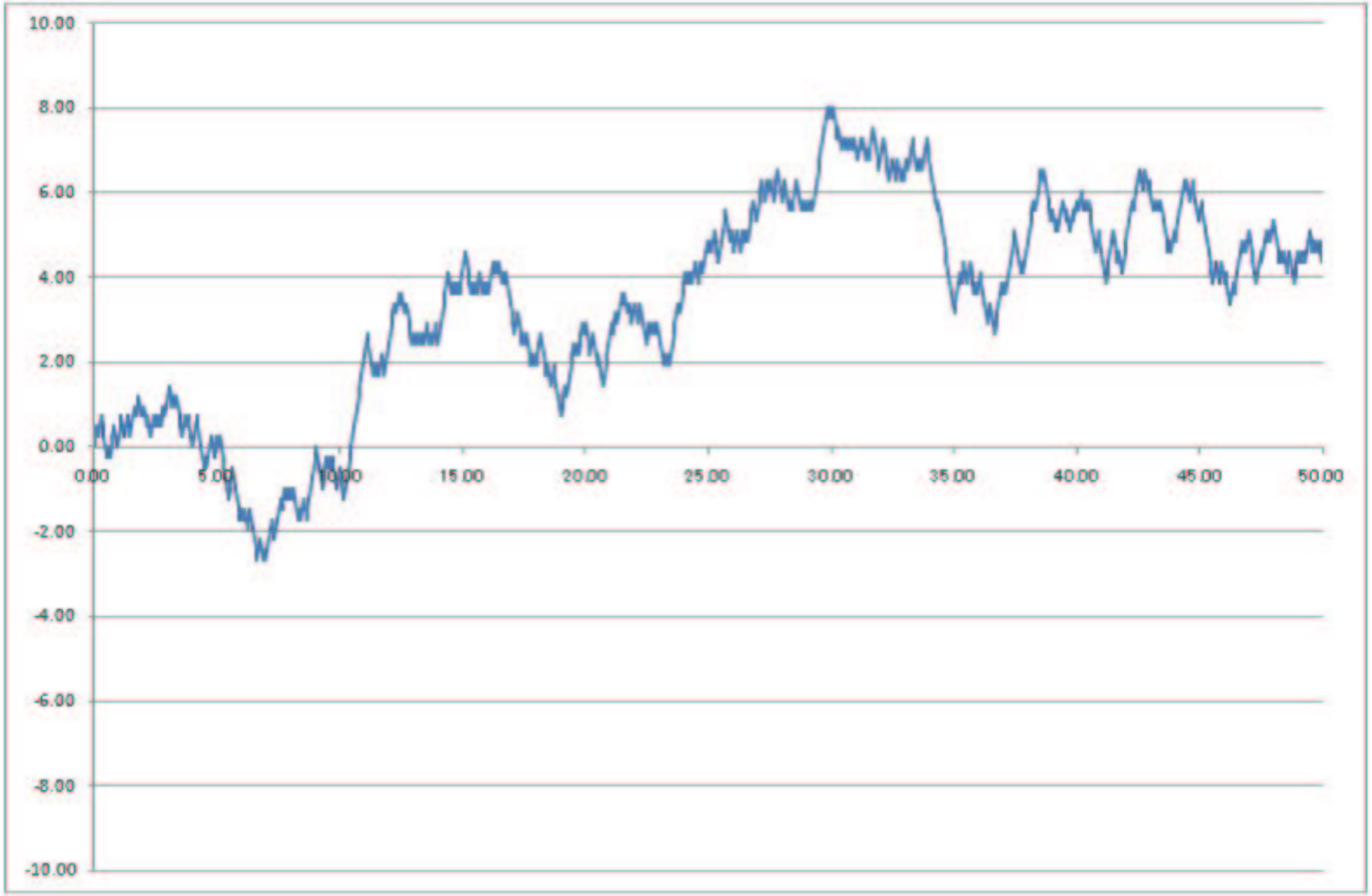
$$S^{(15)}(t) = \frac{S(15t)}{\sqrt{15}}$$



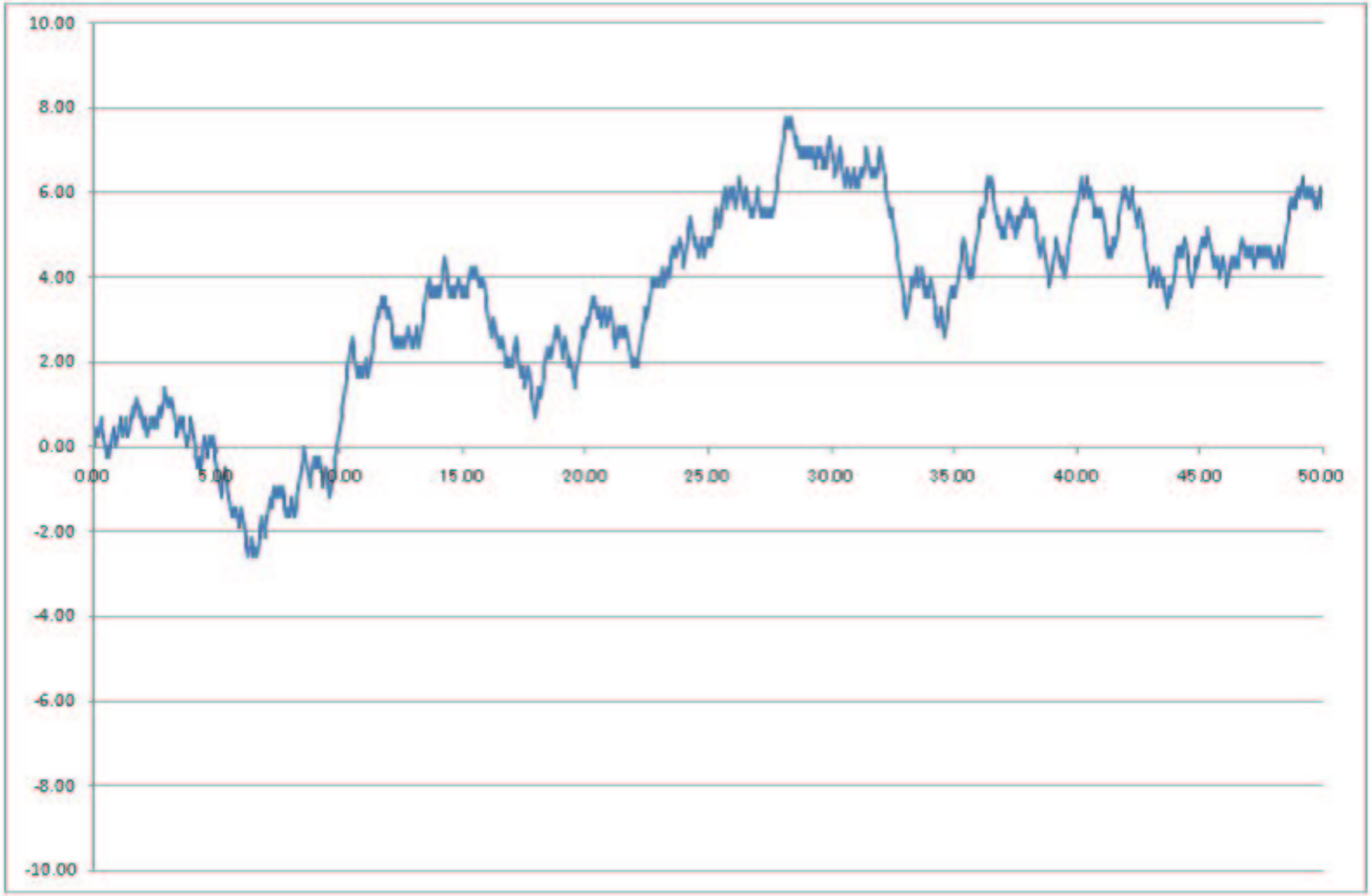
$$S^{(16)}(t) = \frac{S(16t)}{\sqrt{16}}$$



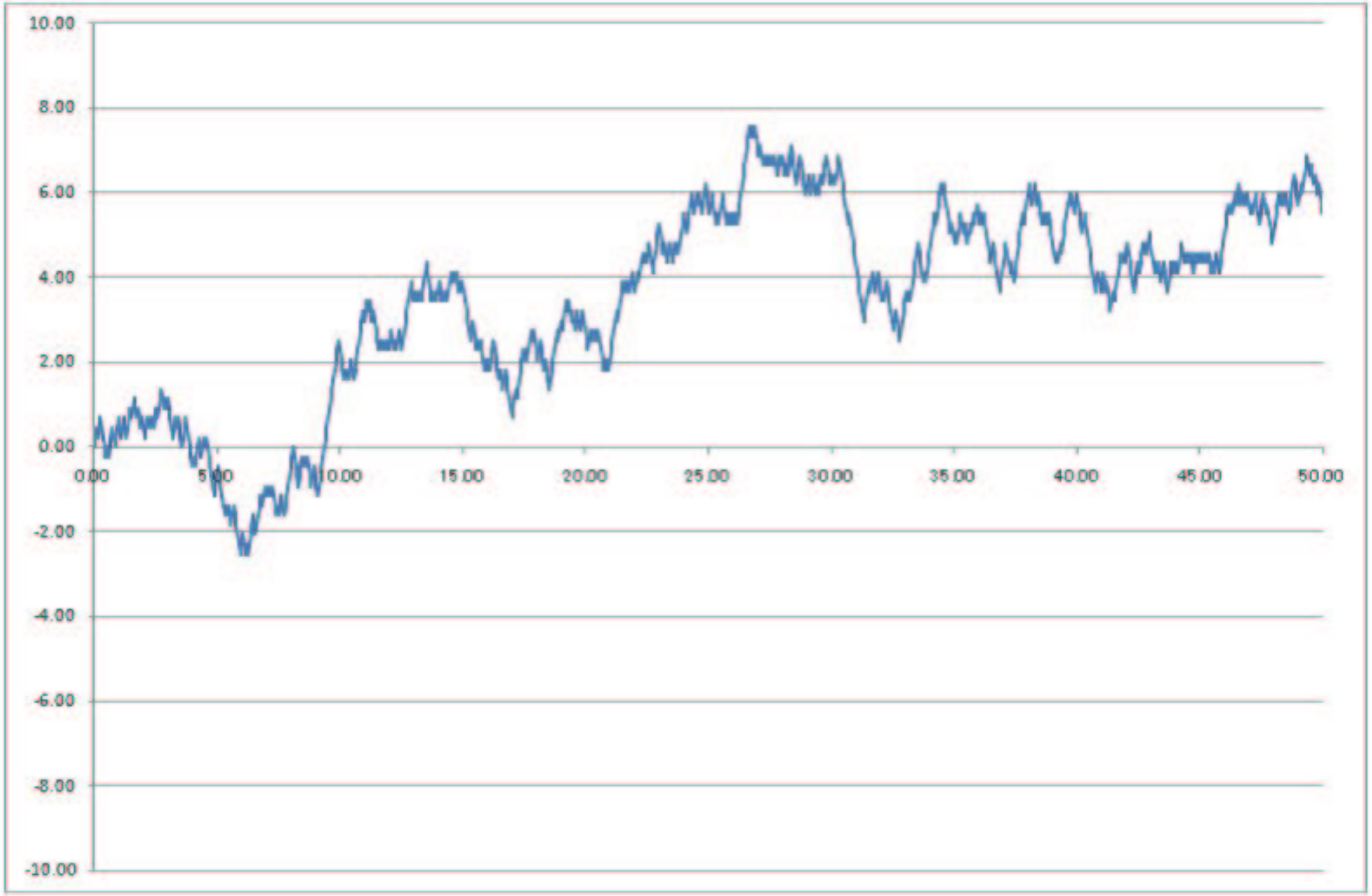
$$S^{(17)}(t) = \frac{S(17t)}{\sqrt{17}}$$



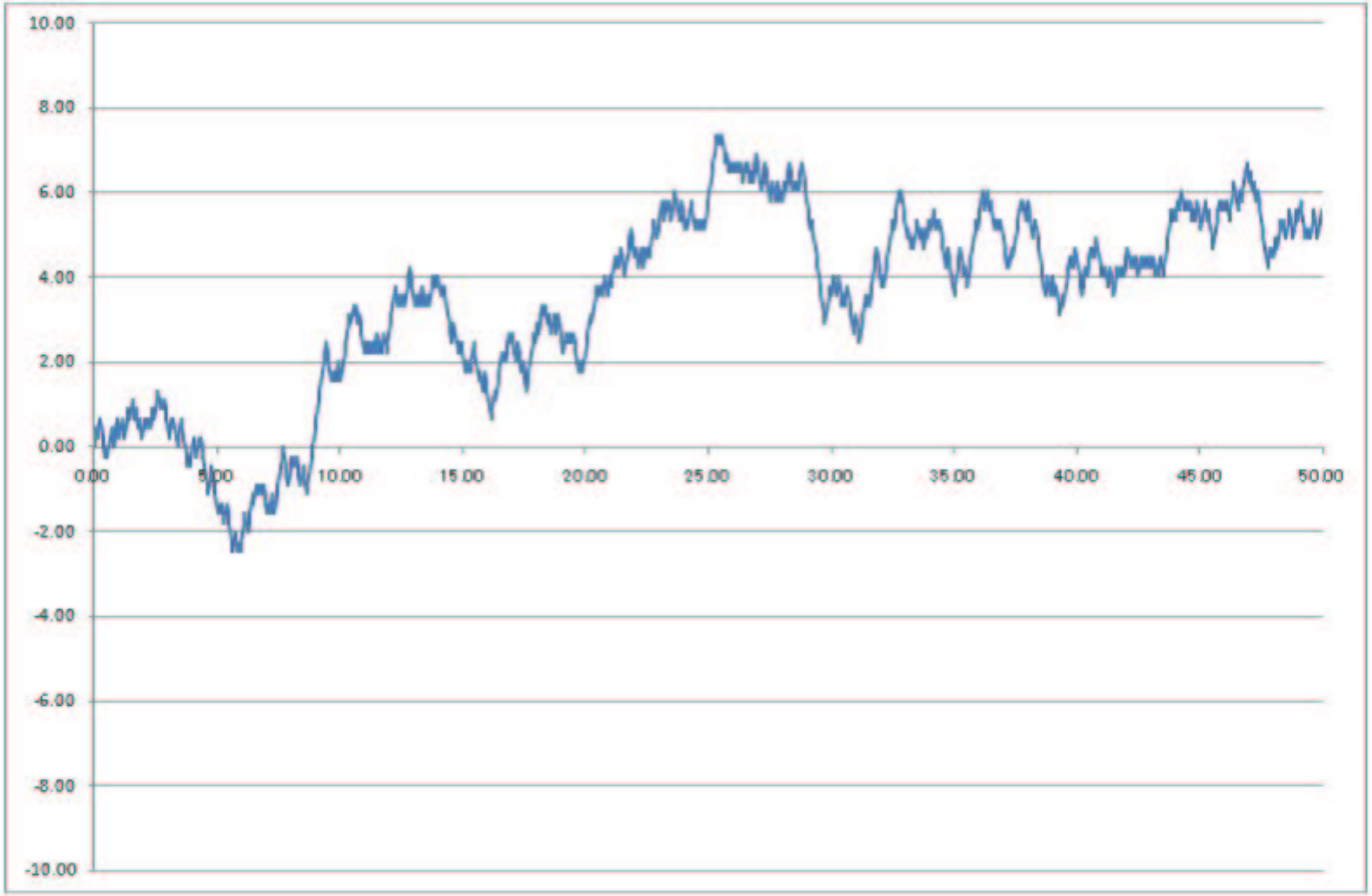
$$S^{(18)}(t) = \frac{S(18t)}{\sqrt{18}}$$



$$S^{(19)}(t) = \frac{S(19t)}{\sqrt{19}}$$



$$S^{(20)}(t) = \frac{S(20t)}{\sqrt{20}}$$



3. ランダムウォークの極限定理

$S^{(N)}(t)$ は $N \to \infty$ において法則収束する.

この極限 $B(t)$ が**ブラウン運動**である.

$$S^{(N)}(t) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} B(t) \qquad (\text{法則収束})$$

これは**確率過程の収束**であることに注意.

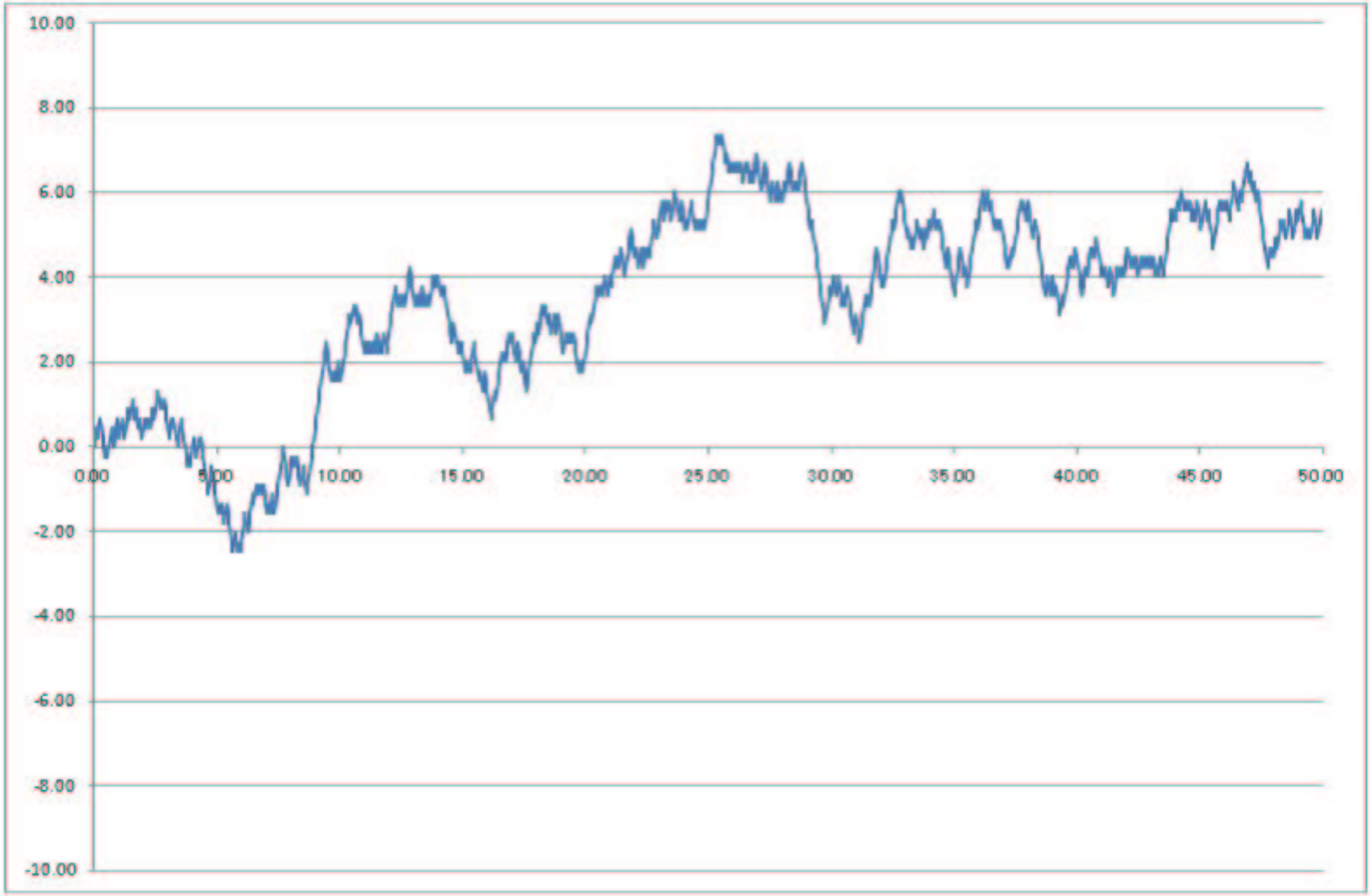
ブラウン運動 $B(t)$ は次の性質を満たす.

(1) 確率1で $B(t)$ は t の連続関数.

(2) 増分は独立で正規分布に従う.

4. ブラウン運動の道の性質

ブラウン運動 $B(t)$ はランダムな t の関数であるが，これを**道**と呼ぶ.
以下では，ブラウン運動の道の性質を見る.



4．ブラウン運動の道の性質 (1) 逆正弦法則

時刻 1 までのブラウン運動の道 $(B(t) : 0 \le t \le 1)$ について,

$$R = (\text{正側滞在時間の割合}) = \frac{(\text{正側に滞在した時間の長さ})}{(\text{全時間の長さ})}$$

Betting!

$$\left| R - \frac{1}{2} \right| \le \frac{1}{4} \quad \text{or} \quad \left| R - \frac{1}{2} \right| > \frac{1}{4} \quad ?$$

シミュレーションで見る

4．ブラウン運動の道の性質 (1) 逆正弦法則

ランダムウォークの有限ステップで見てみる．

$S_1, S_2, \ldots, S_n$ のうちで正なものの個数 Z_n の割合 $R_n = \dfrac{Z_n}{n}$ を調べる．

- 1 step: $P\left(\left|R_1 - \dfrac{1}{2}\right| \leq \dfrac{1}{4}\right) = P(\emptyset) = 0.$
- 2 steps: $P\left(\left|R_2 - \dfrac{1}{2}\right| \leq \dfrac{1}{4}\right) = P(Z_2 = 1) = \dfrac{1}{4}.$
- 3 steps: $P\left(\left|R_3 - \dfrac{1}{2}\right| \leq \dfrac{1}{4}\right) = P(Z_3 = 1, 2) = \dfrac{3}{8}.$

4．ブラウン運動の道の性質（1）逆正弦法則

定理 (レヴィの逆正弦法則). $R = \dfrac{(\text{正側滞在時間})}{(\text{全時間})}$

$0 \leq a < b \leq 1$ に対し，

$$\begin{aligned} P(a \leq R \leq b) &= \frac{2}{\pi}\left\{\sin^{-1}\sqrt{b} - \sin^{-1}\sqrt{a}\right\} \\ &= \int_a^b \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

確率 $P(R \in [a,b])$ の値は，区間 $[a,b]$ の幅 $b-a$ が一定の下では，
区間 $[a,b]$ が $\dfrac{1}{2}$ $(=$ 区間 $[0,1]$ の中心$)$ から外れるほど大きい．

4．ブラウン運動の道の性質（1）逆正弦法則

レヴィの逆正弦法則によると,

$$
\begin{aligned}
P\left(\left|R-\frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{4}\right) &= P\left(\frac{1}{4} \le R \le \frac{3}{4}\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin^{-1}\frac{1}{2}\right\} \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right\} = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

$$
P\left(\left|R-\frac{1}{2}\right| > \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3}
$$

4．ブラウン運動の道の性質（1）逆正弦法則

ブラウン運動の道は，どの時刻においても
均等な確率で正側または負側に進む

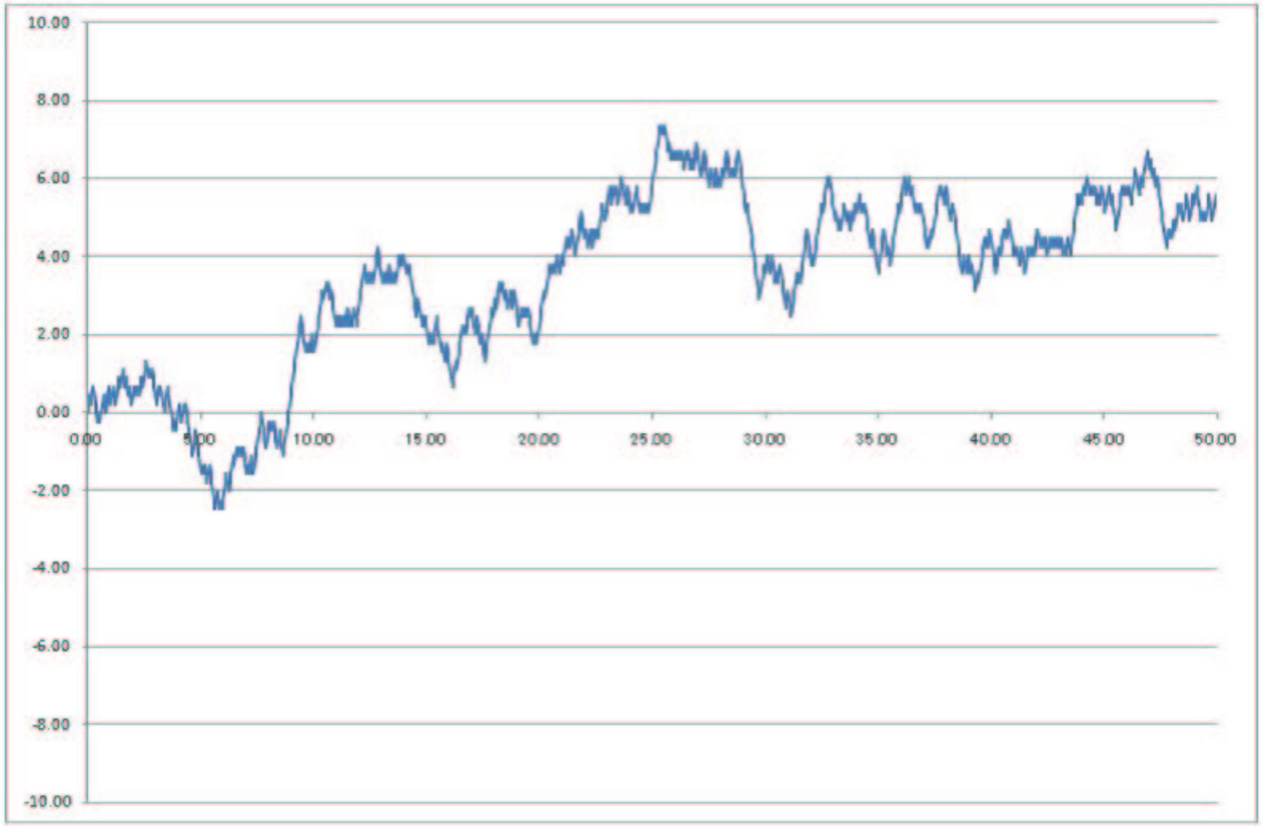
にもかかわらず,

レヴィの逆正弦法則によると,
ブラウン運動の道が正側で過ごす時間の割合は
極端な方が高い確率で起こる.

4. ブラウン運動の道の性質 (2) 道の微分不可能性

定理. ブラウン運動の道 $B(t)$ は t の関数として確率1で
　ほとんどいたるところ**微分不可能**.

すなわち，ブラウン運動の道は極めてギザギザしていることを意味している.



4. **ブラウン運動の道の性質** (2) 道の微分不可能性

ブラウン運動の道の微分不可能性は,
ランダムウォークの縮小変換の極限として
ブラウン運動が現れることに起因していると思われる.

定理. ブラウン運動の道は(法則の意味での) **自己相似性**を持つ:

$$\text{任意の}\,\lambda > 0\,\text{に対し},\quad \frac{B(\lambda t)}{\sqrt{\lambda}} \overset{\text{law}}{=} B(t)$$

4. ブラウン運動の道の性質 (2) 道の微分不可能性

マンデルブローのフラクタル

自己相似性を持つ図形をフラクタル図形と呼ぶ.

自己相似性: その図形のどの一部分も全体と同じ複雑性を有する.

ブラウン運動の自己相似性:

その図形のどの一部分も "統計的に" 全体と同じ複雑性を有する.

4. ブラウン運動の道の性質 (2) 道の微分不可能性

マンデルブロー著，広中平祐監訳,「フラクタル幾何学」p.35，p.36，p.C2より

5．確率微分方程式

ブラウン運動の道は(確率１でほとんどいたるところ)微分不可能

であるが,

確率積分を通して**確率微分方程式**を考えることができる.

その前にまず，微分方程式を考えよう.

5. 漸化式

$r > 0$, $h > 0$ とする．次の漸化式を考える．

$$Z_n - Z_{n-1} = rhZ_{n-1}, \qquad Z_0 = 1$$

$Z_n = (1 + rh)Z_{n-1}$ であるからこの漸化式は解けて，

$$Z_n = (1 + rh)^n$$

5. 漸化式

$$Z_n - Z_{n-1} = rhZ_{n-1}, \qquad Z_0 = 1$$

$$Z_n = (1 + rh)^n$$

N を自然数とし，$h = \dfrac{1}{N}$ とする．

$(0, Z_0), (h, Z_1), (2h, Z_2), \ldots$ を線分でつないだものを $(t, Z(t))$ と書く．

$$\frac{Z(t+h) - Z(t)}{h} = rZ(t), \qquad t = nh,\ n = 0, 1, \ldots.$$

$$Z(t) = \left(1 + \frac{r}{N}\right)^{Nt}$$

5. 微分方程式

N は自然数，$h = \dfrac{1}{N}$.

$N \to \infty \iff h \to 0+$ とするとどうなるか?

$$\frac{Z(t+h) - Z(t)}{h} = rZ(t), \qquad t = nh,\ n = 0, 1, \ldots.$$

$$\frac{\mathrm{d}Z(t)}{\mathrm{d}t} = rZ(t), \qquad Z(0) = 1$$

$$Z(t) = \left(1 + \frac{r}{N}\right)^{Nt} = \left\{\left(1 + \frac{r}{N}\right)^{\frac{N}{r}}\right\}^{rt}$$

$$Z(t) = \mathrm{e}^{rt}$$

5. 微分方程式

$$Z(t) = \mathrm{e}^{rt}$$

$$\frac{\mathrm{d}Z(t)}{\mathrm{d}t} = rZ(t), \qquad Z(0) = 1$$

微分方程式において，形式的に分母を払うと

$$\mathrm{d}Z(t) = rZ(t)\mathrm{d}t, \qquad Z(0) = 1$$

微分方程式は積分方程式と等価である．

$$Z(t) = 1 + r\int_0^t Z(s)\mathrm{d}s$$

5. 確率漸化式

再び無限回コイン投げを考える:

$$X_n = \begin{cases} +1 & \text{n回目が表} \\ -1 & \text{n回目が裏} \end{cases}$$

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$$

$+1$ か -1 の値を確率 $\dfrac{1}{2}$ ずつでとる確率変数の無限列

5. 確率漸化式

$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$

$$Z_n - Z_{n-1} = r Z_{n-1} \sqrt{h} X_n, \qquad Z_0 = 1$$

$Z_n = (1 + r\sqrt{h} X_n) Z_{n-1}$

$$Z_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + r\sqrt{h} X_k)$$

5. 確率漸化式

$$Z_n - Z_{n-1} = rZ_{n-1}\sqrt{h}X_n, \qquad Z_0 = 1$$

$$Z_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + r\sqrt{h}X_k)$$

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

N を自然数とし，$h = \dfrac{1}{N}$ とする．

$(0, \sqrt{h}S_0), (h, \sqrt{h}S_1), (2h, \sqrt{h}S_2), \ldots$ を線分でつないだものを $(t, B(t))$

$(0, Z_0), (h, Z_1), (2h, Z_2), \ldots$ を線分でつないだものを $(t, Z(t))$

$$Z(t+h) - Z(t) = rZ(t)\{B(t+h) - B(t)\}, \qquad t = nh,\ n = 0, 1, \ldots$$

5. 確率微分方程式?

$$Z(t+h) - Z(t) = rZ(t)\{B(t+h) - B(t)\}$$

$h \to 0+$ とするとどうなるか?

$$\frac{Z(t+h) - Z(t)}{h} = rZ(t)\frac{B(t+h) - B(t)}{h}$$

$$\frac{\mathrm{d}Z(t)}{\mathrm{d}t} = rZ(t)\frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t} \qquad ???$$

これは意味がない．ブラウン運動の道 $B(t)$ は微分不可能!!!

5．確率微分方程式

$$Z(t+h) - Z(t) = rZ(t)\left\{B(t+h) - B(t)\right\}$$

$h \to 0+$ とするとどうなるか?

確率積分方程式として意味づける.

$$Z(t) = 1 + r\int_0^t Z(s)\mathrm{d}B(s)$$

あるいはこれを，形式的に微分形で書く.

$$\mathrm{d}Z(t) = rZ(t)\mathrm{d}B(t), \qquad Z(0) = 1$$

これを**確率微分方程式**という.

5．確率微分方程式

漸化式を解いた形

$$Z_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + r\sqrt{h}X_k)$$

で，$nh = t$ として $h \to 0+$ とした極限は?

$$\log Z(t) = \sum_{k=1}^{n} \log(1 + r\sqrt{h}X_k)$$

マクローリン展開　$\log(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots$　を用いて,

$$\begin{aligned}\log Z(t) =& r\sum_{k=1}^{n} \sqrt{h}X_k - \frac{1}{2}r^2 \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{h}X_k)^2 + \cdots \\ =& r\sum_{k=1}^{n} \left\{B(kh) - B((k-1)h)\right\} - \frac{1}{2}r^2 h \sum_{k=1}^{n} (X_k)^2 + \cdots \\ =& rB(nh) - \frac{1}{2}r^2 nh \cdot \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (X_k)^2 + \cdots\end{aligned}$$

5. 確率微分方程式

漸化式を解いた形

$$Z(t) = \prod_{k=1}^{n} (1 + r\sqrt{h}X_k)$$

で，$nh = t$ として $h \to 0+$ とした極限は?

$$\begin{aligned} \log Z(t) =& rB(nh) - \frac{1}{2}r^2 nh \cdot \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k)^2 + \cdots \\ =& rB(t) - \frac{1}{2}r^2 t \cdot \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k)^2 + \cdots \end{aligned}$$

$h \to 0+$ とすると，$n \to \infty$ より

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k)^2 \to 1 \qquad \text{(大数の法則)}$$

誤差項が無視できるとすると，次が得られたことになる:

$$\log Z(t) = rB(t) - \frac{1}{2}r^2 t$$

5．確率微分方程式

確率微分方程式

$$\mathrm{d}Z(t) = rZ(t)\mathrm{d}B(t), \qquad Z(0) = 1$$

の解は,

$$\log Z(t) = rB(t) - \frac{1}{2}r^2 t$$

すなわち,

$$Z(t) = \exp\left\{rB(t) - \frac{1}{2}r^2 t\right\}$$

これは**幾何ブラウン運動**と呼ばれる.

扱いやすい非負値確率過程であることから数理ファイナンスでよく用いられる.

5．確率微分方程式

逆に，幾何ブラウン運動

$$Z(t) = \exp\left\{rB(t) - \frac{1}{2}r^2 t\right\}$$

に対して**合成関数の微分**を用いることで，確率微分方程式

$$\mathrm{d}Z(t) = rZ(t)\mathrm{d}B(t), \qquad Z(0) = 1$$

を導出することができるであろうか?

形式的に施してしまうと，

$$\frac{\mathrm{d}Z(t)}{\mathrm{d}t} = Z(t)\left(r\frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{2}r^2\right)$$

となってよくわからないが…

5．確率微分方程式，伊藤の公式

定理 (伊藤の公式).　(条件を気にせずラフに言うと)

$$\mathrm{d}f(Y(t)) = f'(Y(t))\mathrm{d}Y(t) + \frac{1}{2}f''(Y(t))(\mathrm{d}Y(t))^2$$

幾何ブラウン運動

$$Z(t) = \exp\left\{rB(t) - \frac{1}{2}r^2 t\right\}$$

において，

$$f(x) = \mathrm{e}^x, \qquad Y(t) = rB(t) - \frac{1}{2}r^2 t \qquad Z(t) = f(Y(t))$$

として伊藤の公式を適用する．

5．確率微分方程式，伊藤の公式

定理 (伊藤の公式).

$$\mathrm{d}f(Y(t)) = f'(Y(t))\mathrm{d}Y(t) + \frac{1}{2}f''(Y(t))(\mathrm{d}Y(t))^2$$

$$\begin{aligned} Y(t) =& rB(t) - \frac{1}{2}r^2 t \\ \mathrm{d}Y(t) =& r\mathrm{d}B(t) - \frac{1}{2}r^2\mathrm{d}t \\ (\mathrm{d}Y(t))^2 =& \left\{ r\mathrm{d}B(t) - \frac{1}{2}r^2\mathrm{d}t \right\}^2 \\ =& \left\{ r\mathrm{d}B(t) \right\}^2 - 2\left\{ r\mathrm{d}B(t) \right\}\left\{ \frac{1}{2}r^2\mathrm{d}t \right\} + \left\{ \frac{1}{2}r^2\mathrm{d}t \right\}^2 \\ =& r^2\mathrm{d}t + 0 + 0 \end{aligned}$$

$(\mathrm{d}B(t))^2 = \mathrm{d}t,\quad (\mathrm{d}B(t))(\mathrm{d}t) = 0,\quad (\mathrm{d}t)^2 = 0$ という約束.

5．確率微分方程式，伊藤の公式

定理 (伊藤の公式).

$$\mathrm{d}f(Y(t)) = f'(Y(t))\mathrm{d}Y(t) + \frac{1}{2}f''(Y(t))(\mathrm{d}Y(t))^2$$

$$f(x) = \mathrm{e}^x, \qquad Y(t) = rB(t) - \frac{1}{2}r^2 t, \qquad Z(t) = f(Y(t))$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}Z(t) =& \mathrm{d}f(Y(t)) \\
=& f'(Y(t))\mathrm{d}Y(t) + \frac{1}{2}f''(Y(t))(\mathrm{d}Y(t))^2 \\
=& Z(t)\left\{r\mathrm{d}B(t) - \frac{1}{2}r^2\mathrm{d}t\right\} + \frac{1}{2}Z(t)r^2\mathrm{d}t \\
=& rZ(t)\mathrm{d}B(t)
\end{aligned}$$